

Relativitätstheorie

Norbert Marxer / 19.11.2024

Dies ist das Skript zum Vortrag ...

"Relativitätstheorie – von Galilei bis Einstein"

der anlässlich der Vereinsversammlung des Naturwissenschaftlichen Forums am 18. September 2024 im Physiksaal des Liechtensteinischen Gymnasiums abgehalten wurde. Die damals gezeigten Inhalte werden hier mit kleinen Ergänzungen/Auslassungen und Überleitungssätzen wiedergegeben.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen

Der Vortrag wird auch online gestellt (www.nwf.li)

Schwierigkeitsgrad

Wichtigkeit der Mathematik

Ankündigung von verschiedenen Vorträgen zur Physik ...

Annus mirabilis von Albert Einstein

Prinzipien der Relativitätstheorie

Drei Prinzipien

Spezielles Relativitätsprinzip

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Äquivalenz von träger und schwerer Masse

Spezielle Relativitätstheorie (SRT, d.h. ohne Gravitation)

Einführung

Koordinatensysteme

Koordinatensysteme in der SRT

Lorentz Transformation und Minkowski Diagramme

Addition von Geschwindigkeiten $w = \frac{(v+u)}{1+uv/c^2}$

Invarianten der SRT

Alternative Schreibweisen der Lorentz Transformation

$E = m c^2$

Phänomene

Allgemeine Relativitätstheorie (ART, d.h. mit Gravitation)

Einleitung

Warum braucht es die ART (Allgemeine Relativitäts Theorie)?

1. Prinzip Allgemeines Relativitätsprinzip

2. Prinzip Starkes Äquivalenzprinzip

Theorie

Experimentelle Bestätigungen der ART

Vorbemerkungen

In der Einladung zum Vortrag hiess es ...

Wir behandeln die für die Spezielle und Allgemeine Relativitätstheorie **grundlegenden Prinzipien** wie ...

- Relativitätsprinzip, Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und Äquivalenz von träger und schwerer Masse.

Mit Diagrammen und Abbildungen untersuchen wir dann die **wichtigsten Phänomene** wie ...

- bewegte Uhren laufen langsamer, bewegte Körper sind verkürzt, das Zwillingsparadoxon, die Expansion des Universums, Schwarze Löcher, Gravitationswellen ...

Vor dem eigentlichen Vortrag habe ich auch noch einige allgemeine Bemerkungen gemacht.

Der Vortrag wird auch online gestellt (www.nwf.li)

Die entsprechende Website des NWF war damals noch im Aufbau. Sie wurde jedoch mittlerweile aufgeschaltet. Dieses Skript kann nun hier (Link) gefunden werden.

Schwierigkeitsgrad

Ein Vortrag über ein physikalisches Gebiet kann in verschiedenen Schwierigkeitsgraden gehalten werden wie ...

■ populärwissenschaftlich

- Vorträge praktisch ohne Gleichungen/Formeln
- denn: Viele Autoren beherzigen den Spruch von Stephen Hawking ...

Jede mathematische Formel in einem Buch halbiert die Verkaufszahl dieses Buches.

■ wissenschaftlich

- Lehrveranstaltungen an einer Uni oder ETH
- In diesen Veranstaltungen und begleitenden Lehrbüchern liegt der Schwerpunkt darin, Gleichungen herzuleiten, zu beweisen und zu lösen, was mitunter ein jahrelanges Studium verlangt.

Dieser Vortrag soll einen Schwierigkeitsgrad haben, der zwischen diesen beiden Extremen liegt, den semipopulären Schwierigkeitsgrad ...

■ semipopulär

- Die physikalischen Phänomene werden mit Hilfe von Gleichungen erläutert.
- Im Vordergrund stehen jedoch die Interpretation und das Verständnis der Gleichungen.

Das Ziel ist es, die Gleichungen zu verstehen, nicht sie zu lösen.

Eingedenk der Tatsache, dass ...

Ein Bild bzw. eine Abbildung sagt mehr als 1000 Worte.
Eine Formel sagt mehr als 1000 Sätze.

soll auch viel mit Abbildungen, Diagrammen und Formeln/Gleichungen gearbeitet werden. Um den Vortrag auf einem angemessenen mathematischen Niveau zu halten, habe ich mich auch am Lehrplan des LG orientiert.

Es gibt einige Autoren, deren Bücher auf diesem semipopulären Niveau sind. Zu unserem Vortragsthema passend kann ich vor allem die folgenden Autoren/Bücher empfehlen ...

- **Leonard Susskind** (et al) **The Theoretical Minimum**, 4 Bücher (Link)
 - insbesondere: “Special Relativity and Classical Field Theory - The Theoretical Minimum”, 2017
 - insbesondere: “General Relativity - The Theoretical Minimum”, 2023
- **Sean Carroll** **The Biggest Ideas in the Universe**, 3 Bücher (Link)
 - insbesondere: “The Biggest Ideas in the Universe: Space, Time, and Motion”, 2022 (Link)

Warum semipopulär?

Sean Carroll schreibt in der Einleitung zu seinem Buch “The Biggest Ideas in the Universe: Space, Time, and Motion” (Link)...

*Sometimes solving an equation is easy: If the equation is $x = y^2$, and we're told that $y = 2$, the solution is $x = 4$. Not so hard. But real-world physics equations are more complicated than that, involving ideas from calculus (the mathematics of continuous change) and other advanced concepts. **Solving such equations can become a full-time occupation for working physicists.** Therefore, sensibly enough, their education consists in large part in learning to solve equations. Any physics student will tell you that the difficult part of their years in school isn't going to the lectures, it's doing the problem sets that professors keep handing out as if the students have nothing else to do that weekend.*

*Here in *The Biggest Ideas in the Universe*, we're not going to teach you how to solve the equations. **But you will learn to understand the equations, even ones that are considered relatively advanced by physics-textbook standards.** That turns out to be enormously easier. These books are dedicated to the belief that **the ideas of modern physics—the real ones, not watered-down metaphorical versions—can be accessible to anyone willing to do just a little bit of thinking about the equations and what they mean.***

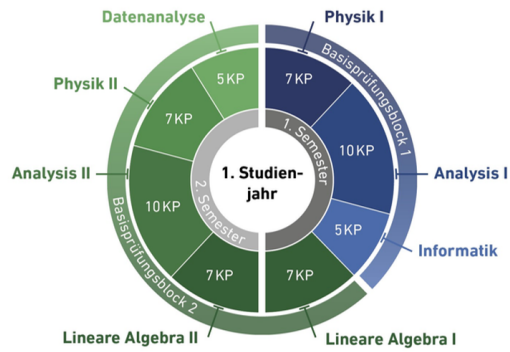
Wichtigkeit der Mathematik

Gleichungen und die Mathematik spielen in der Physik eine sehr wichtige Rolle. Viele Gebiete können mit einer oder wenigen Gleichungen beschrieben werden. Die Aufgabe der Physiker ist es dann, allgemeine Lösungen zu diesen Gleichungen zu finden, was in vielen Fällen extrem schwierig sein kann.

Die Wichtigkeit der Mathematik wird in verschiedenen Zitaten unterstrichen ...

- | | |
|-----------------------------|--|
| Leonardo da Vinci | Keinerlei Glaubwürdigkeit ist in jenen Wissenschaften, die sich der mathematischen Wissenschaften nicht bedienen oder keine Verbindung zu ihnen haben. |
| Galileo Galilei | Mathematics is the language with which God wrote the Universe. |
| Carl Friedrich Gauss | Die Mathematik ist die Königin der Wissenschaften. |
| Immanuel Kant | In jeder reinen Naturlehre ist nur soviel an eigentlicher Wissenschaft enthalten, als Mathematik in ihr angewandt werden kann. |
| Eugene Wigner | The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences. |

oder auch mit dem Lehrplan für den Physik Bachelor an der ETH Zürich.



Im ersten Studienjahr betreffen nur 14 Kreditpunkte von insgesamt 58 die Physik. Der Rest ist reine und angewandte Mathematik.

Ankündigung von verschiedenen Vorträgen zur Physik ...

Die Physik umfasst eine Riesenanzahl von **Fachgebieten** ...

Mechanik, Elektrodynamik, Optik, Akustik
Statistische Physik, Thermodynamik,
Teilchenphysik, Kernphysik, Atomphysik, Plasmaphysik, Molekülphysik,
Festkörperphysik, Biophysik, Geophysik, Fluiddynamik, Strömungslehre,
Quantenfeldtheorie, Quantenoptik, Quantum Computing,
Astronomie, Astrophysik, Kosmologie, Allgemeine Relativitätstheorie,
und seit der Nobelpreis Verleihung 2024 scheinbar auch maschinelles Lernen
und neuronale Netze

basierend auf drei (modernen) **Fundamenten** ...

Relativitätstheorie (SRT und ART) → dieser Vortrag
Quantentheorie
Komplexe Systeme

sowie unterschiedlichen **Methoden** ...

Theoretische Berechnungen (Mathematik)
Gedankenexperimente
Computersimulationen
Experimentalphysik
Beobachtungen

Der Verein "Naturwissenschaftlichs Forum" hat sich u.a. zum Ziel gesetzt, das Interesse an den Naturwissenschaften und die Kenntnisse darüber in Liechtenstein zu fördern. In den nächsten Jahren sollen deshalb vermehrt Vorträge zu interessanten Themen angeboten werden.

Eine mögliche “Tour de Physik” könnte die folgenden Gebiete umfassen ...

01	Einleitung, Mathematica, phyphox	12	Wärmelehre
02	Grössen und Einheiten	13	Elektrizitätslehre
03	Statik	14	Festkörperphysik
04	Kinematik	15	Atomphysik, Quantenphysik
05	Dynamik	16	Kernphysik
06	Ruhende Gase und Flüssigkeiten	17	Teilchenphysik
07	Strömungen	18	Spezielle Relativitätstheorie
08	Mechanische Schwingungen	19	Allgemeine Relativitätstheorie
09	Mechanische Wellen	20	Kosmologie
10	Akustik	21	Komplexe Systeme
11	Optik		

Etwa zwei Drittel der Themen umfassen Gebiete, die auch im Physikunterricht des LG Vaduz oder der BMS Liechtenstein behandelt werden.

Die verlangten mathematischen Vorkenntnisse sind auf einem bescheidenen Niveau. Kompliziertere **Berechnungen** und **Simulationen** können mit der Software “**Mathematica**” (Link), angegangen werden.

Die Vorträge sollen durch **Experimente** ergänzt werden. Dabei sollen auch die verschiedenen Sensoren des Smart Phones mit Hilfe der App “**phyphox**” (Link) benutzt werden.

Annus mirabilis von Albert Einstein

Albert Einstein spielt in diesem Vortrag eine wichtige Rolle. Er war massgeblich an der Entwicklung der Speziellen Relativitätstheorie beteiligt und entwickelte fast im Alleingang die Allgemeine Relativitätstheorie.

Das Jahr 1905 wird generell als **Annus mirabilis** (Wunderjahr) von Albert Einstein angesehen. In diesem Jahr publizierte er, obwohl er nicht an einer Uni forschte, sondern über Beziehungen des Vaters eines Studienkollegen im Patentoffice in Bern arbeitete, fünf wichtige Schriften (Er erhielt nach seiner Diplomierung an der ETH keine Anstellung an einer Uni) ...

- | | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|------------------|
| ■ Photoelektrischer Effekt | $E = hf$ | Nobelpreis 1922 |
| ■ Brown'sche Bewegung | → | es gibt Atome |
| ■ Spezielle Relativitätstheorie | Konstanz der Lichtgeschwindigkeit | → dieser Vortrag |
| ■ $E = mc^2$ | Äquivalenz von Masse und Energie | |
| ■ Doktorarbeit an der Uni Zürich | Moleküldimensionen | |

Eine angemessene Behandlung von Albert Einstein und seinen Arbeiten würde (mindestens) einen ganzen Vortrag verdienen.

Prinzipien der Relativitätstheorie

Drei Prinzipien

Es gibt drei grundlegende Prinzipien der Relativitätstheorie ...

- das Relativitätsprinzip
- die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit
- das Äquivalenzprinzip

Spezielles Relativitätsprinzip

Wir unterscheiden zwischen speziellem Relativitätsprinzip (für die SRT) und allgemeinem Relativitätsprinzip (für die ART).

Das **spezielle** Relativitätsprinzip besagt, dass ...

- die Naturgesetze für alle **Inertialsysteme** (s.u.) gleich sind d.h. die gleiche Form haben; $F = m a$ gilt in allen Inertialsystemen.
- Beispiel: Ein Jongleur kann ohne Problem auf einem ruhenden und gleichmässig bewegten Wagen jonglieren (nicht jedoch auf einem beschleunigten).

*“Ein Bezugssystem in der Physik heißt **Inertialsystem** (von lateinisch inertia für „Trägheit“), wenn jeder kräftefreie Körper relativ zu diesem Bezugssystem in Ruhe verharrt oder sich gleichförmig (geradlinig und unbeschleunigt) bewegt. **Kräftefrei** bedeutet, dass der Körper keine Kräfte von anderen Objekten erfährt oder diese sich insgesamt aufheben, sodass die resultierende Kraft Null ist.”* (Link)

Galileo **Galilei** (1632) war der Erste, der das spezielle Relativitätsprinzip formuliert hat: Er war der Meinung, dass ein Beobachter, der sich unter Deck eines unbeschleunigten Schiffes befindet, aus den Vorgängen um ihn herum nicht feststellen kann, ob sich das Schiff in Bewegung befindet oder nicht.

Das heisst, es gibt keinen bevorzugten oder absoluten Bewegungszustand irgendeines Beobachters. Es können Bewegungen des Körpers nur relativ zu anderen Körpern oder Bezugssystemen bestimmt werden.

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Im Jahr 1864 fasste Maxwell (1831-1879) alle bisherigen Experimente der Elektrizitätslehre in den vier sogenannten Maxwell Gleichungen zusammen.



Abbildung: James Clark Maxwell (Link)

Name	SI	Physikalischer Inhalt
Gaußsches Gesetz	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	Elektrische Feldlinien divergieren voneinander unter Anwesenheit elektrischer Ladung; die Ladung ist Quelle des elektrischen Feldes.
Gaußsches Gesetz für Magnetfelder	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	Magnetische Feldlinien divergieren <i>nicht</i> , das Feld der magnetischen Flussdichte ist quellenfrei; es gibt keine magnetischen Monopole .
Induktionsgesetz	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Änderungen der magnetischen Flussdichte führen zu einem elektrischen Wirbelfeld . Das Minuszeichen schlägt sich in der Lenzschen Regel nieder.
Erweitertes Durchflutungsgesetz	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	Elektrische Ströme – einschließlich des Verschiebungsstroms – führen zu einem magnetischen Wirbelfeld.

Abbildung: Die Maxwell Gleichungen (Link)

Uns interessiert im Moment die Bedeutung der verschiedenen Symbole nicht:

z.B. \vec{E} elektrische Feldstärke
 \vec{B} magnetische Flussdichte ...

Wichtig sind für uns im Moment die folgenden Punkte:

- Die Maxwell Gleichungen führen auf elektromagnetische Wellen, die sich mit der Geschwindigkeit c (es gilt $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$) ausbreiten.
- Licht ist auch eine elektromagnetische Welle.
- In diesen Formeln kommt die Lichtgeschwindigkeit als Konstante vor.
- Maxwell et al postulierten ein ruhendes Medium (den sogenannte Aether; analog zur Luft bei akustischen Wellen), in dem sich das Licht mit der Geschwindigkeit c ausbreitet. Allein in diesem System galten die Maxwell Gleichungen exakt.
- Michelson-Morley führten im Jahr 1887 das berühmte Experiment durch, bei dem sie versuchten, die kleinen Bewegungsänderungen des Lichts bei der Bewegung der Erde durch den Aether zu messen. Sie fanden jedoch nichts.
- Der Ausweg?
- SRT 1905 von Einstein mit den zwei Prinzipien (der Aether wird nicht benötigt) ...
 - Die Naturgesetze sind gleich in allen Inertialsystemen.
 - Es ist ein Naturgesetz, dass sich das Licht mit der Geschwindigkeit c bewegt.

Äquivalenz von träger und schwerer Masse

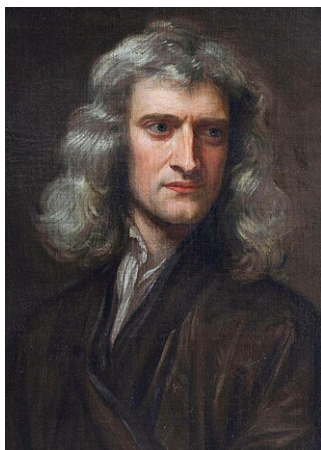


Abbildung: Isaac Newton (Link)

Wir kennen aus dem Physikunterricht die beiden wichtigen Formeln von Newton.

(1)

$$F_B = m_T a$$

2. Newton'sches Axiom

Dieses Gesetz besagt, dass die Beschleunigung a eines Körpers proportional zur beschleunigenden Kraft F_B ist, und dass die Proportionalitätskonstante gleich der trägen Masse m_T des Körpers ist. **Die Masse ist hier ein Mass für die Trägheit, d.h. den Widerstand, der einer beschleunigenden Kraft entgegengesetzt wird.**

(2)

$$F_G = G \frac{m_S M_S}{r^2}$$

Gravitationsgesetz

Dieses Gesetz besagt, dass die Gravitationskraft F_G zwischen zwei Körpern proportional zum Produkt $m_S M_S$ der sogenannten schweren Massen m_S und M_S ist. **Hier bestimmt die Masse die Interaktion zwischen dem Körper und der Gravitationskraft.**

Die schweren Massen sind verantwortlich für die Gravitationskraft. Die trägen Massen sind verantwortlich für den Widerstand, der einer Geschwindigkeitsänderung (d.h. Beschleunigung) entgegengesetzt wird.

Das wichtige **Äquivalenzprinzip** ist nun ...

(3)

$$\text{Schwere Masse} = \text{Träge Masse}$$

Dies müsste nicht so sein. Die **Coulombkraft** ($F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2}$) sieht sehr ähnlich aus wie die Gravitationskraft, aber hier wirkt die Ladungen q und Q als Quelle der Coulombkraft und haben nichts mit der trägen Masse zu tun.

Spezielle Relativitätstheorie (SRT, ohne Gravitation)

Einführung

In der SRT beschäftigen wir uns mit Bewegungen, die von unterschiedlichen Koordinatensystemen aus beobachtet werden.

Bei kleinen Geschwindigkeiten und schwachen Gravitationsfeldern reicht die Newton'sche Theorie. Wir brauchen weder die SRT, die in vielen Fällen erst bei Geschwindigkeiten von zirka 10% der Lichtgeschwindigkeit relevant wird, noch die ART, weil im schwachen Gravitationsfeld der Erde das Newton'sche Gravitationsgesetz die Phänomene ausreichend genau beschreibt.

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns zunächst allgemein mit Koordinatensystemen, bevor wir dann einige Ausführungen machen, wie die Zeit- und Ortsachse eines bewegten Beobachters dargestellt werden. Als nächstes bestimmen wir die wichtige Lorentz Transformation, mit der die Koordinaten des ruhenden Systems in die Koordinaten des bewegten Systems umgerechnet werden können und umgekehrt.

Weiters werden die Addition von Geschwindigkeiten und die Invarianten der SRT (Größen, die in allen Inertialsystemen gleich gross sind) besprochen. Bevor wir dann auf die interessanten und ungewohnten Phänomene der SRT zu sprechen kommen, werden noch alternative Schreibweisen der Lorentz Transformation sowie kurz die berühmteste Formel der Physik $E = m c^2$ besprochen.

Koordinatensysteme

Betrachtungen in verschiedenen Koordinatensystemen

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Diagramme sowie die Koordinatentransformation der SRT herzuleiten. In den folgenden Abschnitten stütze ich mich hauptsächlich auf die Ausführungen von Leonard Susskind im Buch "Special Relativity and Classical Field Theory" (Link). Darin schreibt er auf Seite 3

More than anything else, the special theory of relativity is a theory about reference frames.

Was ist ein solcher Bezugsrahmen bzw. Bezugssystem bzw. Koordinatensystem?

Kartesische und Polarkoordinaten

Wir alle wissen, dass wir einen bestimmten Punkt in einer Ebene auf verschiedene Arten beschreiben können.

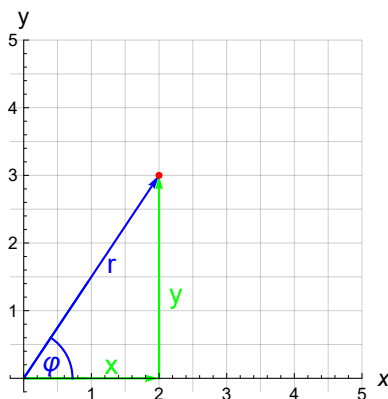


Abbildung: Kartesische Koordinaten $\{x, y\}$ und Polarkoordinaten $\{r, \varphi\}$

Der gleiche Punkt $\{x, y\} = \{2, 3\}$ kann entweder durch kartesische Koordinaten $\{x, y\}$ oder mit Hilfe von Polarkoordinaten $\{r, \varphi\}$ bestimmt werden. Dabei haben diese Größen eine spezielle Beziehung, die es erlaubt, von einem Koordinatensystem auf ein anderes umzurechnen. Zum Beispiel hier:

$$x = r \cos[\varphi] \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r \sin[\varphi] \quad \varphi = \text{ArcTan}\left[\frac{y}{x}\right]$$

Achtung (evtl.): $+180^\circ$ / Division durch 0

vermeiden

Je nach physikalischer Situation ist die eine oder die andere Wahl der Koordinaten geeigneter.

Im 3-dimensionalen Raum gibt es auch - je nach Situation - eine ideale Wahl des Koordinatensystems ...

kartesische Koordinaten $\{x, y, z\}$

allgemein

sphärische Koordinaten $\{r, \varphi, \theta\}$

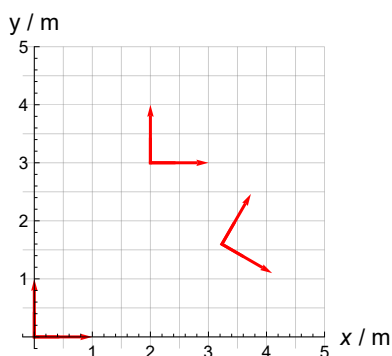
bei sphärischer Symmetrie (Kugelsymmetrie)

Zylinderkoordinaten $\{r, \varphi, z\}$

bei Zylindersymmetrie

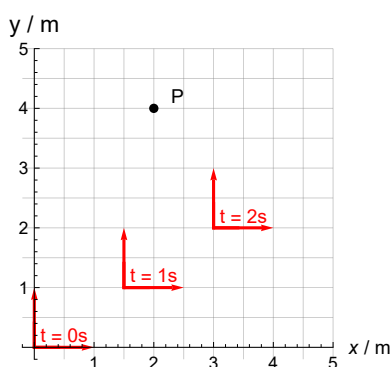
Translation und Rotation der Koordinaten

Es kann auch sein, dass die Koordinatensysteme gegeneinander verschoben und/oder gegeneinander rotiert sind ...



Bewegtes Koordinatensystem

oder dass das Koordinatensystem sich mit einem Beobachter im Raum (hier 2D) mitbewegt ...



Die Koordinaten des Punktes P ändern sich im bewegten Koordinatensystem K' mit der Zeit ...

$$t = 0 \text{ s} \quad \{x_{P'}^1, y_{P'}^1\} = \{2, 4\}$$

$$t = 1 \text{ s} \quad \{x_{P'}^1, y_{P'}^1\} = \{0.5, 3\}$$

$$t = 2 \text{ s} \quad \{x_{P'}^1, y_{P'}^1\} = \{-1, 2\}$$

Wiederum können wir eine Formel finden, um die Koordinaten des Punktes zwischen den beiden Koordinatensystemen umzurechnen. Hier ...

$$x'[t] = 2 \text{ m} - 1.5 \frac{\text{m}}{\text{s}} * t$$

$$y'[t] = 4 \text{ m} - 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} * t$$

z.B. für $t = 2 \text{ s}$

$$x'[2 \text{ s}] = 2 \text{ m} - 1.5 \frac{\text{m}}{\text{s}} * 2 \text{ s} = 2 \text{ m} - 3 \text{ m} = -1 \text{ m}$$

$$y'[2 \text{ s}] = 4 \text{ m} - 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} * 2 \text{ s} = 4 \text{ m} - 2 \text{ m} = 2 \text{ m}$$

Weg-Zeit Diagramme in der Kinematik

Die Diagramme der SRT sind ähnlich zu den Weg-Zeit Diagrammen für konstante Geschwindigkeit, die wir in der Schule bei der Behandlung der Kinematik kennengelernt haben. Hier nur eine kurze Repetition.

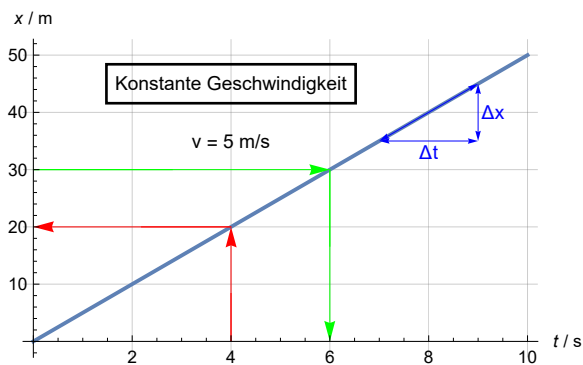
Wenn wir eine Bewegung ohne Beschleunigung haben, dann bleibt die Geschwindigkeit konstant. Wir kennen aus der Primarschulzeit die Beziehung zwischen der konstanten **Geschwindigkeit** v , der **Zeit** t und dem zurückgelegten **Weg** x . Wenn wir von der Annahme ausgehen, dass sich zur Zeit $t = 0 \text{ s}$ der Körper auf der Position $x = 0 \text{ m}$ befindet, haben wir die folgende **Formel** ...

$$x = v t$$

und die folgende **Wertetabelle** für eine Geschwindigkeit von $v = 5 \text{ m/s}$...

t / s	0	2	4	6	8	10
x / m	0	10	20	30	40	50

sowie das einfache **Weg-Zeit Diagramm** ...



Wir werden im Folgenden noch einige Diagramme darstellen. Deshalb dazu einige Bemerkungen:

■ Achsen

- Bei solchen Diagrammen sollten immer zuerst die Achsen betrachtet werden.
- Welche physikalische Grösse (und in welcher Einheit) wird in der **horizontalen** Achse aufgetragen? Hier Zeit/Sekunde
- Welche physikalische Grösse (und in welcher Einheit) wird in der **vertikalen** Achse aufgetragen? Hier: Position/Meter

■ Geraden konstanter Werte

- Die horizontalen Linien sind in diesem Diagramm die Linien gleicher Position.
- Die vertikalen Linien sind in diesem Diagramm die Linien gleicher Zeit.

■ Werte der Kurve

- Aus diesem Diagramm können wir auch für eine gegebene Zeit die dazugehörige Position finden (roter Pfeil).
- oder für eine gegebene Position die dazugehörige Zeit (grüner Pfeil).
- Die blaue Gerade gibt die Zeitabhängigkeit der Position wider.

■ Steigung

- Dieses Weg-Zeit Diagramm (konstante Geschwindigkeit, ohne Beschleunigung) hat eine konstante Steigung.
- Die Steigung kann herausgelesen/herausgemessen werden mit Hilfe des Steigungsdreiecks.
- Für zwei (beliebige) Punkte auf der Geraden wird das blaue Dreieck (siehe oben) eingetragen.
- Die Geschwindigkeit ergibt sich zu $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\text{Differenz der } x\text{-Werte der beiden Punkte}}{\text{Differenz der } t\text{-Werte der beiden Punkte}}$

Geradengleichung

Bei der Herleitung der Transformationsgleichungen der SRT müssen wir die Geraden mathematisch beschreiben. Dies geschieht folgendermassen ...

- 1) $y = y_1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$ **Zwei-Punkte-Form**
wenn zwei Punkte $P1 = \{x_1, y_1\}$ und $P2 = \{x_2, y_2\}$ der Geraden gegeben sind.
- 2) $y = y_1 + a(x - x_1)$ **Punkt-Steigungs-Form**
wenn ein Punkt $P1 = \{x_1, y_1\}$ und die Steigung a der Geraden gegeben sind.

Ausmultiplizieren der obigen Gleichungen ergibt dann die Geradengleichung in der Standardform $y = a x + b$ mit der Steigung a und dem Wert b , der angibt, bei welchem y -Wert die Gerade die y -Achse schneidet.

Koordinatensysteme in der SRT

Weg-Zeit (Minkowski) Diagramme in der SRT

In der SRT werden die Weg-Zeit Diagramme anders als in der Kinematik gezeichnet. Es ist üblich ...

- dass die Koordinaten in der Reihenfolge $\{t, x, y, z\}$ und $\{t', x', y', z'\}$ angegeben werden.
- dass für den ruhenden Beobachter ein kartesisches Koordinatensystem K mit zwei Achsen eingezeichnet wird, wobei
 - die positive Zeitachse senkrecht nach oben
 - und die positive x -Achse horizontal nach rechts eingetragen wird,
 - die Bewegung in die x -Richtung erfolgt und deshalb die y - und z -Achse nicht eingezeichnet werden (müssen).
 - Eine anschauliche 4-dimensionale Darstellung aller vier Koordinaten $\{t, x, y, z\}$ ist nicht möglich.
- dass sich ein zweiter Beobachter mit der Geschwindigkeit v in der x -Richtung bewegt.
- dass der bewegte Beobachter ein Koordinatensystem K' mit sich führt.
- dass zur Zeit $t = 0$ die Koordinatenursprünge zusammenfallen: $O = O' = \{0, 0\}$

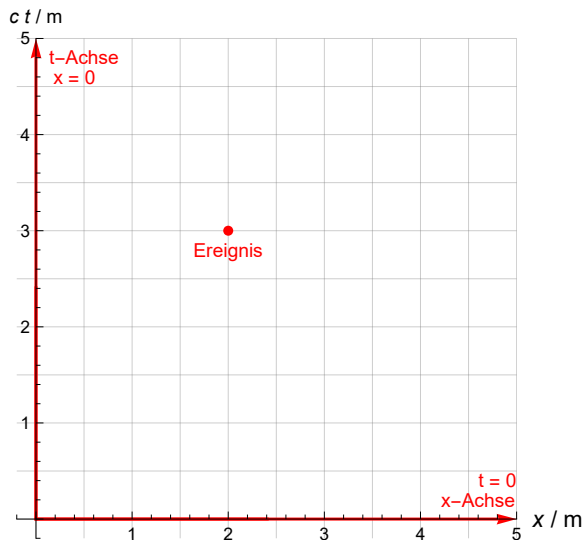
- dass die Gerade für ein **Photon**/Lichtteilchen, das sich mit der Lichtgeschwindigkeit c bewegt im Diagramm eine **Steigung von 45°** hat.
 - Dies bedeutet für die Skalierung beispielsweise: In der Vertikalen t/s und in der Horizontalen $x/\text{Lichtsekunde} = x/(299\,792\,458\text{ m})$
 - ODER: dass in der vertikalen Achse nicht t , sondern $c t$ eingetragen wird. Dies hätte auch den Vorteil, dass beide Achsen die gleiche Dimension (Länge) haben und auch in der gleichen Einheit (z.B. Meter) angegeben werden können.
- dass das Weg-Zeit Diagramm nun **Minkowski** Diagramm oder **Raumzeit** Diagramm (engl. spacetime diagram) genannt wird.
- Punkte in diesem Raumzeit Diagramm werden **Ereignis** (engl. event) genannt.
- Trajektorien von Körpern in diesem Raumzeit Diagramm werden **Weltlinien** (engl. world lines) genannt.
- Spacetime Diagramme sind sehr wichtig zum Verständnis der SRT und ART. Leonard Susskind schreibt:

"Drawing a spacetime diagram is usually the best way to understand a problem in relativity."

Koordinatensystem K

Wir starten nun mit der Herleitung der relevanten Diagramme und Formeln.

Zunächst das Koordinatensystem für einen ruhenden Beobachter.



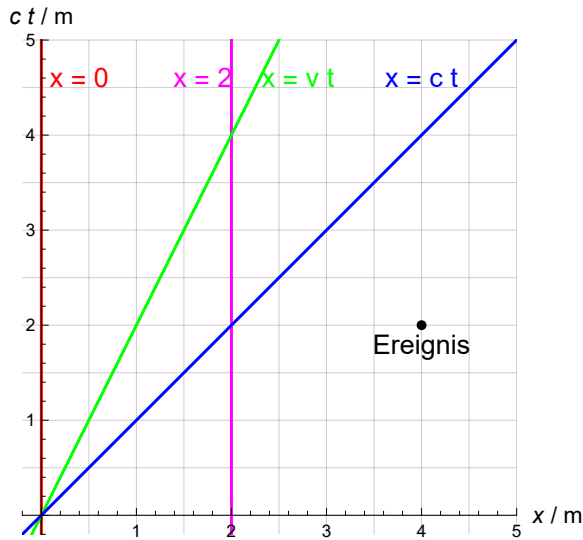
Dieses Koordinatensystem K hat die folgenden Eigenschaften ...

- In diesem Koordinatensystem wird nur eine Raumrichtung (nämlich x) eingetragen.
- Die x -Achse und die t -Achse stehen senkrecht aufeinander und sind so skaliert dass sich für einen Lichtstrahl eine 45° Steigung ergibt.
- Ein Punkt im Diagramm entspricht einem Ereignis zur Zeit t am Ort x . Die Bestimmung der Koordinaten erfolgt für das in der Abbildung gegebene Ereignis folgendermassen ...
 - aus $x/m = 2$ folgt $x = 2\text{ m}$
 - aus $ct/m = 3$ folgt $ct = 3\text{ m}$ oder $t = \frac{3\text{ m}}{c} = \frac{3\text{ m}}{299\,792\,458\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1.00069 \times 10^{-8}\text{ s}$
- Die horizontale Achse ist die x -Achse (Raum-Achse) und hat die Gleichung $t = 0$. Die horizontalen Geraden sind die Ereignisse, die zur gleichen Zeit stattfinden, also synchron sind.
- Die vertikale Achse ist die t -Achse (Zeit-Achse) und hat die Gleichung $x = 0$. Die vertikalen Geraden sind die Ereignisse, die am gleichen Ort stattfinden.

Weltlinien und Ereignis

Im folgenden Raumzeit Diagramm sind die **Weltlinien** (d.h. wie sich der Ort eines Körpers im Laufe der Zeit

verändert) von vier Körpern eingezeichnet.



Bedeutung der vier farbigen Geraden ...

- Rot Weltlinie eines bei $x = 0$ m ruhenden Körpers
- Magenta Weltlinie eines bei $x = 2$ m ruhenden Körpers
- Grün Weltlinie $x = v t$ eines mit der Geschwindigkeit $v = 0.5 c$ bewegten Körpers.
- Blau Weltlinie eines Lichtteilchens (mit der Geschwindigkeit c). Diese Weltlinie hat die Steigung 1 bei dieser Skalierung.

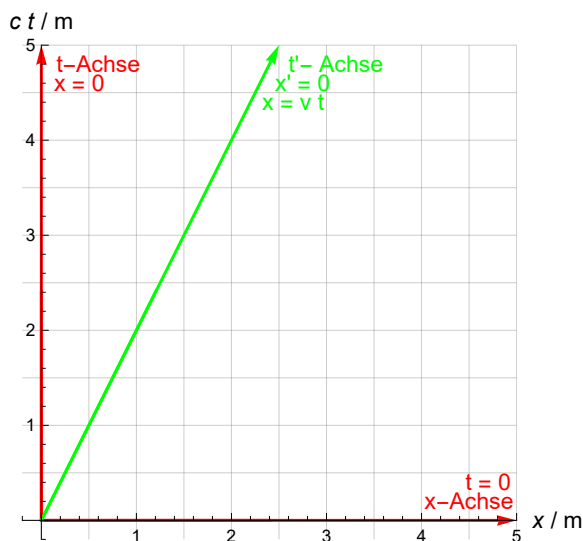
Ereignis (schwarzer Punkt) ...

- Das Ereignis hat die Koordinaten $\{x, t\} = \{4 \text{ m}, 6.67128 \times 10^{-9} \text{ s}\}$
 - denn aus $x/m = 4$ (aus dem Diagramm) folgt $x = 4 \text{ m}$
 - denn aus $ct/m = 2$ (aus dem Diagramm) folgt $ct = 2 \text{ m}$ bzw. $t = \frac{2 \text{ m}}{c} = \frac{2 \text{ m}}{299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 6.67128 \times 10^{-9} \text{ s}$

t' - Achse

Wir bestimmen nun die Zeitachse t' des Koordinatensystems K' . K' ist das Koordinatensystem, in dem der Beobachter, der sich im Koordinatensystem K mit der Geschwindigkeit v bewegt, ruht.

Die Zeitachse t' fällt mit der Geraden $x = v t$ zusammen, denn an dieser Stelle ist jeweils $x' = 0$.



x' - Achse

Um die x' - Achse zu bestimmen, müssen wir die Punkte finden, für die $t' = 0$ gilt.

Wir müssen somit die Punkte / Gerade / Ereignisse finden, die für das Koordinatensystem K' gleichzeitig $t' = 0$ sind.

Was heisst gleichzeitig?

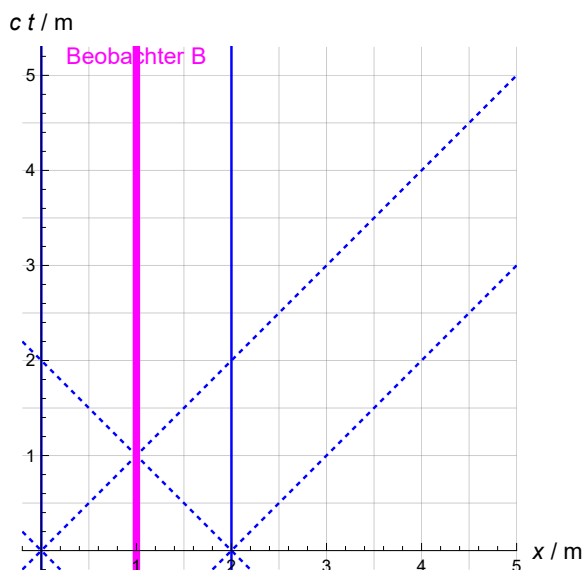
- Für Newton war dies klar, es gab eine universelle Uhr, die in allen Koordinatensystemen gleich verläuft. Das sind die horizontalen Geraden in den Newton'schen Raumzeit Diagrammen.
- Bei Annahme einer konstanten Lichtgeschwindigkeit c ist die Annahme von Newton, dass Gleichzeitigkeit in K auch Gleichzeitigkeit in K' bedeutet, nicht möglich.

Wie hat nun Einstein **Gleichzeitigkeit** definiert?

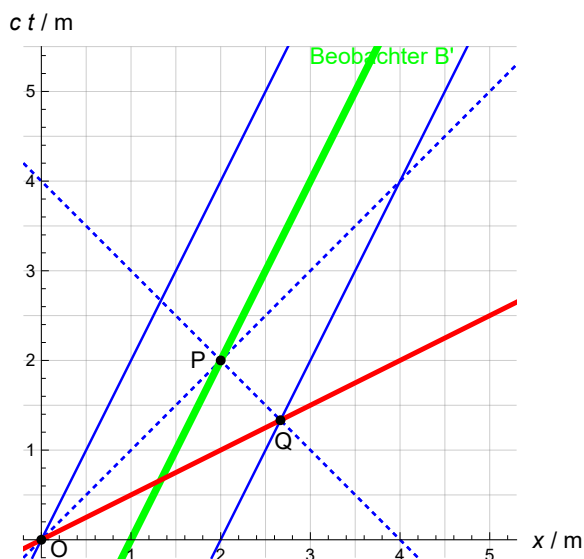
Zwei Ereignisse sind gleichzeitig, wenn von zwei gleich weit entfernten Stellen ausgesandte Lichtsignale zur selben Zeit bei einem Beobachter eintreffen.

Es gilt für einen ruhenden Beobachter ...

- Die horizontale Achse ist die x -Achse des Koordinatensystems K .
- Die vertikale Achse ist die t -Achse des Koordinatensystems K .
- Bei $x = 0$ m und $x = 2$ m befinden sich zwei Lichtquellen. Bei $x = 1$ m befindet sich ein Beobachter B. Alle drei ruhend in K .
- Eingezeichnet sind auch noch deren Weltlinien (Geraden senkrecht nach oben).
- Zur Zeit $t = 0$ geht bei beiden Lichtquellen ein Blitz los.
- Die gestrichelten blauen Geraden im 45° Winkel nach rechts und links oben repräsentieren die Weltlinien der Blitze, die sich in der negativen ($x = -c t$) bzw. positiven x -Richtung ($x = c t$) bewegt.
- Wir sehen, dass im Koordinatensystem K die Blitze gleichzeitig ($c t / m = 1$) beim Beobachter B eintreffen.
- Die beiden Blitze sind gleichzeitige Ereignisse für den Beobachter B in K .



Wie sieht dies für den Beobachter B' aus, der sich mit dem Koordinatensystem K' (das sich gegenüber K mit der Geschwindigkeit v bewegt) mitbewegt? Wann/wo müssen die Blitze losgehen, damit sie gleichzeitig beim Beobachter B' eintreffen?



- Wir wählen den Ursprung des Koordinatensystems K' so, dass es zur Zeit $t = 0$ mit dem Ursprung des Koordinatensystems K zusammenfällt.
- Der Beobachter B' und die (gleich weit entfernten und mit B' mitbewegten) Blitzgeräte bewegen sich mit der Geschwindigkeit $v = 0.5 c$ in K.
- Der schwarze Punkt O auf der Weltlinie des linken Beobachters ist das Ereignis $\{0, 0\}$: d.h. wo und wann der Blitz der linken Quelle ausgelöst wird.
 - Das Ereignis O hat die Koordinaten $\{x_O, t_O\} = \{0, 0\}$ in K.
- Der schwarze Punkt P auf der Weltlinie des Beobachters B' gibt das Ereignis an, wo und wann der Blitz der linken Lichtquelle beim Beobachter eintrifft.
 - P ergibt sich aus dem Schnittpunkt der beiden Weltlinien $x = c t$ (Lichtquelle links) und $x = d + v t$ (Beobachter B').
 - Die Variable d ist der Abstand der Lichtquellen vom Beobachter B. In der Zeichnung ist $d = 1$ m.
- Der schwarze Punkt Q auf der Weltlinie der rechten Lichtquelle gibt das Ereignis an, wo und wann der Blitz der rechten Quelle ausgelöst werden muss, damit er gleichzeitig wie der linke Blitz beim Beobachter B' eintrifft.
 - Q ergibt sich aus dem Schnittpunkt der Weltlinie $x = 2 d + v t$ der Lichtquelle rechts und aus dem Lichtblitz, der durch den schwarzen Punkt P verläuft und die Steigung -1 hat.
- Die Gerade durch die Punkte O und Q ergibt die (rote) Gerade der Gleichzeitigkeit. Sie hat die Gleichung $x = \frac{c^2}{v} t$

Im Folgenden werden wir die Koordinaten der Ereignisse P und Q sowie die Gerade der Gleichzeitigkeit (x' -Achse) berechnen.

Die Berechnung liefert für den Punkt P ...

$$\begin{aligned}
 (1) \quad x &= v t + d & t &= \frac{1}{v} (x - d) && \text{Beobachter B' (grüne Gerade)} \\
 (2) \quad x &= c t & t &= \frac{1}{c} x && \text{Lichtblitz der LQ links nach rechts oben, blau strichliert)}
 \end{aligned}$$

Gleichsetzen (1) = (2) der Gleichungen für x liefert die Koordinate t_P für den Punkt P ...

$$\begin{aligned}
 (3) \quad v t_P + d &= c t_P \\
 d &= (c - v) t_P \\
 t_P &= \frac{d}{c - v} && (4)
 \end{aligned}$$

$$(4) \text{ in } (2) \quad x_P = c t_P = c \frac{d}{c - v} \quad \rightarrow \quad \{x_P, c t_P\} = \left\{ \frac{c d}{c - v}, \frac{c d}{c - v} \right\} = \left\{ \frac{d}{1 - v/c}, \frac{d}{1 - v/c} \right\} \quad (5)$$

Einsetzen von $v = 0.5 c$ und $d = 1$ m ergibt ...

$$\{x_P, c t_P\} = \left\{ \frac{d}{1 - v/c}, \frac{d}{1 - v/c} \right\} = \left\{ \frac{1 \text{ m}}{0.5}, \frac{1 \text{ m}}{0.5} \right\} = \{2 \text{ m}, 2 \text{ m}\} \quad \text{vgl. Abbildung}$$

Die Berechnung liefert für den Punkt Q ...

$$(6) \quad x = v t + 2 d \quad \text{für die LQ rechts (blaue Gerade)}$$

$$(7) \quad x - x_p = -c(t - t_p) \quad \text{für Lichtblitz der LQ rechts (nach links oben, blau strichliert)}$$

denn Steigung (Strahlensatz) $\frac{c t - c t_p}{x - x_p} = -1$

$$(7)' \quad x = x_p - c(t - t_p)$$

Gleichsetzen (6)=(7)' der Gleichungen für x liefert die Koordinate t_Q für den Punkt Q ...

$$v t_Q + 2 d = x_p - c(t_Q - t_p)$$

$$(c + v) t_Q = -2 d + x_p + c t_p$$

$$t_Q = \frac{-2 d + x_p + c t_p}{(c + v)}$$

Obige Ausdrücke (5) einsetzen gibt ...

$$t_Q = \frac{-2 d + \frac{c d}{c - v} + c \frac{d}{c - v}}{(c + v)} = \frac{-2 d(c - v) + \frac{c d}{c - v} + c \frac{d}{c - v}}{(c + v)}$$

$$t_Q = \frac{-2 d c + 2 d v + d c + d c}{(c - v)(c + v)} = \frac{2 d v}{c^2 - v^2} \quad (8)$$

Einsetzen von (8) in (6) ...

$$x_Q = v t_Q + 2 d = v \frac{2 d v}{c^2 - v^2} + 2 d = v \frac{2 d v}{c^2 - v^2} + 2 d * \frac{c^2 - v^2}{c^2 - v^2} = \frac{2 d v^2 + 2 d c^2 - 2 d v^2}{c^2 - v^2} = \frac{2 d c^2}{c^2 - v^2}$$

$$\rightarrow \{x_Q, c t_Q\} = \left\{ \frac{2 d c^2}{c^2 - v^2}, \frac{2 d v c}{c^2 - v^2} \right\}$$

Die Gerade der Gleichzeitigkeit für die **x'-Achse** (rot) geht durch die Punkte O und Q ...

Die **x'-Achse** ergibt sich in K demnach (gemäss der Punkt-Steigungsform) zur Zeit $c t' = 0$ zu ...

$$\boxed{c t} = 0 s + \frac{c t_Q - 0 m}{x_Q - 0 m} (x - 0 m) = \frac{\frac{2 d v c}{c^2 - v^2}}{\frac{2 d c^2}{c^2 - v^2}} x = \frac{2 d v c}{2 d c^2} x = \frac{v}{c} x = \beta x \quad \text{x'-Achse}$$

oder $\boxed{t} = \frac{v}{c} x = \frac{v}{c^2} x \quad \text{Steigung } \beta$

Die **ct'-Achse** hat (gemäss $x = v t = \frac{v}{c} c t$ bzw. $c t = \frac{c}{v} x$) eine Steigung von $\frac{c}{v} = \frac{1}{\beta}$.

$$\boxed{c t} = \frac{1}{\beta} x \quad \text{Steigung } \frac{1}{\beta} \quad \text{ct'-Achse}$$

In der Darstellung (Skalierung), wo die Lichtstrahlen die Steigung 1 bzw. -1 haben gehen die x' -Achse und die t' -Achse durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden auseinander hervor.

Die **t'-Achse** hat (gemäss $x = v t$ bzw. $t = \frac{1}{v} x$) eine Steigung von $\frac{1}{v}$.

$$\boxed{t} = \frac{1}{v} x \quad \text{t'-Achse}$$

Lorentz Transformation und Minkowski Diagramme

Lorentz Transformation

Wir haben in den vorigen Abschnitten die beiden Koordinatenachsen t' und x' bestimmt.

Wie kann man jedoch von einem beliebigen Ereignis $\{x, t\}$ in K auf die Koordinaten $\{x', t'\}$ in K' umrechnen?

Dies erfordert die folgenden Schritte:

- Wir wissen, dass $x' = 0$, wenn $x = vt$. Damit dies und zusätzlich die Linearität (in x und t) gilt, können wir den folgenden Ansatz machen (mit einer unbekanntem Funktion $f_1[v]$):

$$(1) \quad x' = (x - vt) f_1[v]$$

- Ob die Bewegung nach rechts oder links erfolgt (d.h. ob v positiv oder negativ ist), sollte keine Rolle spielen. Dies können wir erreichen, indem wir die noch zu bestimmende Funktion $f[v^2]$ verwenden, die nur vom Quadrat von v abhängt:

$$(2) \quad x' = (x - vt) f[v^2]$$

- Analog wissen wir, dass $t' = 0$, wenn $t = v/c^2 x$, und dass die Umrechnung unabhängig vom Vorzeichen von v ist. Wir machen den Ansatz (mit einer weiteren unbekanntem Funktion $g[v^2]$):

$$(3) \quad t' = \left(t - \frac{v}{c^2} x\right) g[v^2]$$

- Wir betrachten nun einen **Lichtstrahl**. Im System K gilt $x = ct$ und im System K' gilt $x' = ct'$. Die Lichtgeschwindigkeit c ist in beiden Koordinatensystemen gleich.

Einsetzen von (2) und (3) in $x' = ct'$ führt auf ...

$$(x - vt) f[v^2] = c \left(t - \frac{v}{c^2} x\right) g[v^2]$$

Einsetzen von $x = ct$ liefert ...

$$(ct - vt) f[v^2] = c \left(t - \frac{v}{c^2} ct\right) g[v^2]$$

$$(ct - vt) f[v^2] = (ct - vt) g[v^2] \quad \text{falls } c \neq v$$

$$(4) \quad f[v^2] = g[v^2]$$

Dies führt auf das System ...

$$(2) \quad x' = (x - vt) f[v^2]$$

$$(5) \quad t' = \left(t - \frac{v}{c^2} x\right) f[v^2]$$

- Die gleichbedeutenden Aussagen ...

K bewegt sich mit der Geschwindigkeit v gegenüber K' .

K' bewegt sich mit der Geschwindigkeit $-v$ gegenüber K .

heissen nun, dass man x und x' bzw. t und t' vertauschen sowie v durch $-v$ ersetzen kann.

Dies führt auf die folgenden Gleichungen:

$$(6) \quad x = (x' + vt') f[v^2]$$

$$(7) \quad t = \left(t' + \frac{v}{c^2} x'\right) f[v^2]$$

- Einsetzen von (2), (5) in (6) führt auf:

$$x = ((x - vt) f[v^2] + v \left(t - \frac{v}{c^2} x\right) f[v^2]) f[v^2]$$

$$x = ((x - vt) + v \left(t - \frac{v}{c^2} x\right)) f[v^2]^2$$

$$x = \left(x - vt + vt - \frac{v^2}{c^2} x\right) f[v^2]^2$$

$$x = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) x f[v^2]^2$$

$$1 = \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) f[v^2]^2$$

$$(8) \quad \boxed{f[v^2] = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}}$$

Wir wissen nun, wie die Koordinaten t und x transformiert werden. Was passiert mit den Koordinaten y und z senkrecht zur Bewegungsrichtung? Sie bleiben unverändert.

Damit haben wir die sogenannten Lorentz Transformation hergeleitet.

$(9) \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$	Lorentz Transformation
$(10) \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$	
$(11) \quad y' = y$	
$(12) \quad z' = z$	

Mit den Definitionen $\beta = v/c$ und $\gamma = f[v^2] = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ können wir die Gleichungen noch etwas übersichtlicher schreiben ...

$(9) \quad t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c}x\right)$	Lorentz Transformation
$(10) \quad x' = \gamma (x - vt)$	

Zum Zeichnen der Minkowski Diagramme, wo ct in der vertikalen Achse eingezeichnet wird, können auch die folgenden Formeln verwendet werden ...

$(9)' \quad ct' = \gamma (ct - \beta x)$	denn $\beta c = \frac{v}{c} c = v$
$(10)' \quad x' = \gamma (x - \beta ct)$	

Es gibt auch andere Herleitungen dieser Transformationen:

- Im Jahre 1900 schrieb Hendrik Lorentz diese Gleichungen hin unter der Annahme, dass die Maxwell Gleichungen verlangten, dass sich die Körper in Bewegungsrichtung zusammenziehen würden.
- Kurz bevor Einstein leitete Henri Poincare diese Transformationen her, indem er forderte, dass die Maxwell Gleichungen in allen Inertialsystemen die gleiche Form haben.

Minkowski Diagramm (Koordinaten, Skalierung)

Wir haben nun alle relevanten Gleichungen hergeleitet und können ein übersichtliches Minkowski Diagramm zeichnen. Dieses besteht aus ...

- dem kartesischen Koordinatensystem K mit den entsprechenden üblichen horizontalen ($t = \text{konstant}$) und vertikalen ($x = \text{konstant}$) Gitternetzlinien,
- sowie dem bewegten Koordinatensystem K' mit den entsprechend geneigten Gitternetzlinien.
- Zum Zeichnen der Gitternetzlinien in K' verwenden wir die Lorentz Transformation.

- In der Darstellung $\{x, ct\}$ haben die **Parallelen zur t' -Achse** die **Steigung $1/\beta$**

Wir bestimmen einen Punkt auf der Geraden, indem wir wählen ...

$$\begin{array}{ll} x' = k & \text{für die Gitternetzlinie mit dem konstanten } x'\text{-Wert } k \text{ (Konstante)} \\ ct' = 0 & \text{beliebig wählbare Zeitkoordinate } t' \end{array}$$

und mit diesen Werten die (umgekehrte) Lorentztransformation durchführen ...

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + \beta ct') = \gamma k \\ ct &= \gamma(ct' + \beta x') = \gamma \beta k \\ \rightarrow & \text{Punkt der Gitternetzlinien } k: \{\gamma k, \gamma \beta k\} \end{aligned}$$

Wir haben somit die Steigung und einen Punkt für jede Gitternetzlinie bestimmt und können die Gitternetzlinien mit Hilfe der Punkt-Steigungsform einzeichnen.

- In der Darstellung $\{x, ct\}$ haben die **Parallelen zur x' -Achse** die **Steigung β**

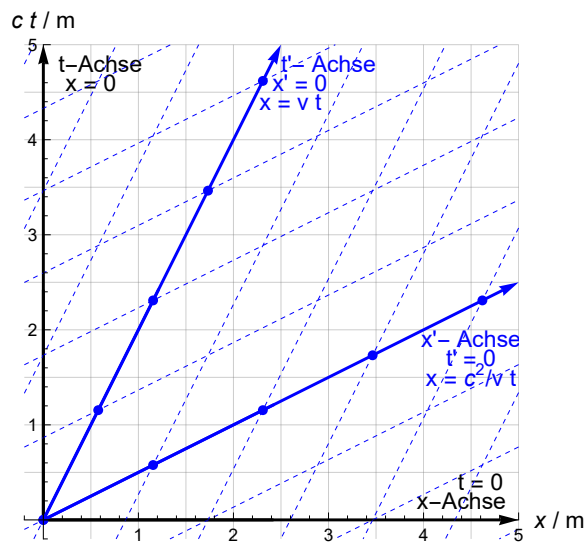
Punkte der Gitternetzlinien bestimmen wir analog zu oben mittels ...

$$\begin{array}{ll} x' = 0 & \text{beliebig wählbare } x'\text{-Koordinate} \\ ct' = k & \text{für die Gitternetzlinie mit dem konstanten } t'\text{-Wert } k \text{ (Konstante)} \end{array}$$

und mit diesen Werten die (umgekehrte) Lorentztransformation durchführen ...

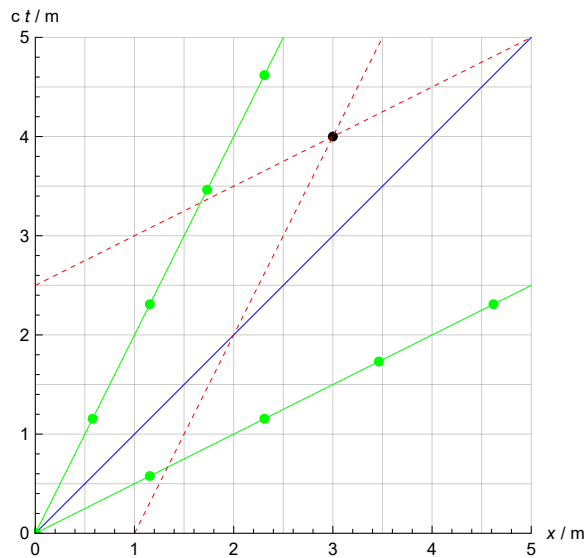
$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + \beta ct') = \gamma \beta k \\ ct &= \gamma(ct' + \beta x') = \gamma k \\ \rightarrow & \text{Punkt der Gitternetzlinie } k: \{\gamma \beta k, \gamma k\} \end{aligned}$$

Wir haben somit die Steigung und einen Punkt für jede Gitternetzlinie bestimmt und können die Gitternetzlinien mit Hilfe der Punkt-Steigungsform einzeichnen.



Beispiel

Als Beispiel haben wir in der folgenden Abbildung den schwarzen Punkt bzw. das Ereignis $\{x, ct\} = \{3 \text{ m}, 4 \text{ m}\}$ eingezeichnet. Die entsprechenden Koordinaten in K' können herausgelesen/abgeschätzt werden (Schnittpunkte der gestrichelten roten Geraden, die parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen, mit den grünen Koordinatenachsen von K') ...



oder auch mit Hilfe der Lorentz Transformation ($v = 0.5 c$) berechnet werden ...

$$x' = \gamma(x - vt) = \frac{1}{\sqrt{1-0.5^2}} (3 \text{ m} - 0.5 * 4 \text{ m}) = \mathbf{1.1547 \text{ m}}$$

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) = \frac{1}{\sqrt{1-0.5^2}} (4 \text{ m} - 0.5 * 3 \text{ m}) = \mathbf{2.88675 \text{ m}}$$

Dies stimmt mit den herausgelesenen Werten überein.

Lorentz Transformation bei unterschiedlichen Geschwindigkeiten

Wir können uns nun fragen, wie sich die Lorentz Transformation bei grossen oder kleinen Geschwindigkeiten verhält.

Um die Grösse der Effekte durch die SRT zu bestimmen, ist vor allem die Kenntnis des Faktors γ wichtig.

$v = 0$ → Galilei Transformationen, Newton's absolute Zeit

Wenn $v = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, dann gilt ...

$$\beta = \frac{v}{c} = 0$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 1$$

und die Lorentz Transformation (d.h. die Umrechnung vom Koordinatensystem K ins Koordinatensystem K') kann geschrieben werden als ...

$$(1) \quad t' = 1 \left(t - \frac{0 * x}{c^2} \right) = t$$

$$(2) \quad x' = 1 (x - vt) = x - vt$$

Diese gelten in der Newton'schen Physik und werden **Galilei-Transformationen** genannt.

$$(3) \quad t' = t \quad \text{gemäss Newton's absoluter Zeit}$$

$$(4) \quad x' = x - vt$$

Umgekehrt gilt für die Umrechnung von K' ins Koordinatensystem K:

$$(5) \quad t = t'$$

$$(6) \quad x = x' + vt \stackrel{(1)'}{=} x' + vt'$$

Für einen **Lichtstrahl** im Koordinatensystem K ...

$$(7) \quad x = ct$$

gilt im K' System durch Einsetzen von (5), (6) ...

$$x' + vt' = ct'$$

$$(8) \quad x' = (c - v)t'$$

Der Lichtstrahl in K' bewegt sich mit der Geschwindigkeit $c - v$ und **widerspricht damit dem Prinzip der konstanten Lichtgeschwindigkeit.**

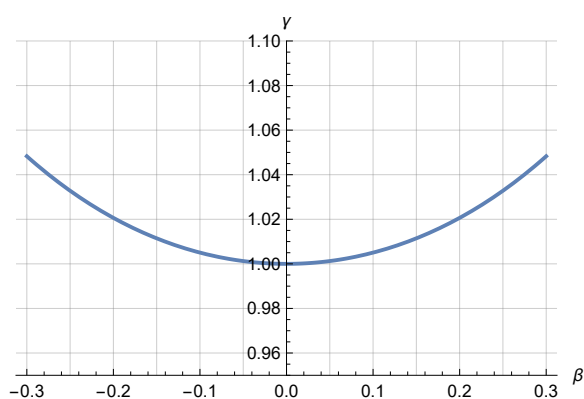
Einstein und Newton können nicht gleichzeitig recht haben. Die Lichtgeschwindigkeit kann nicht universell sein, wenn es eine universelle (für alle gleiche) Zeit gibt.

Während in der SRT Raum und Zeit miteinander verwoben sind, betrachtete Newton Raum und Zeit als vollständig separat ...

- der 3-dimensionaler Raum war Raum; und
- die **Zeit war universell**. Das heisst: für alle Beobachter (ob ruhend, bewegt oder beschleunigt) läuft die Zeit gleich schnell.

v klein gegenüber c → Merkliche Effekte ab zirka $v = 10\%$ von c

Die folgende Abbildung zeigt die Abhängigkeit des Faktors γ von der Geschwindigkeit.



Wir sehen aus der Abbildung, dass ab zirka 10% der Lichtgeschwindigkeit die Abweichung des Faktors γ von 1 zirka 0.5% beträgt

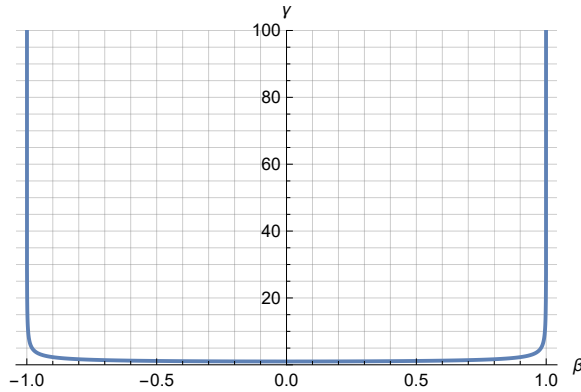
$$\beta = 0.1 \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1.00504$$

und dann immer schneller wächst.

v sehr gross

→ Rasante Zunahme

Je näher β bei 1 liegt, desto grösser ist γ . Bei $\beta = 1$ wäre γ unendlich gross.



Gut sieht man auch die rasche Zunahme des Faktors γ , je näher die Geschwindigkeit v der Lichtgeschwindigkeit c kommt.

β	γ
0	1.
0.9	2.29416
0.99	7.08881
0.999	22.3663
0.9999	70.7124
0.99999	223.607
0.999999	707.107
0.9999999	2236.07
0.99999999	7071.07
0.999999999	22360.7
0.9999999999	70710.7

$v > c$

→ Nichts ist schneller als Licht im Vakuum

Wenn die Geschwindigkeit v zwischen zwei Inertialsystemen grösser als c ist, ...

wird der Ausdruck $1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2$ negativ

wird der Ausdruck $\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$ rein imaginär (eine komplexe Zahl).

Dies führt auf imaginäre Koordinaten (d.h. imaginäre Werte für Massstäbe und Uhren). Dies ist Unsinn.

Wir schliessen: Nichts kann sich schneller als Licht (im Vakuum) bewegen.

Addition von Geschwindigkeiten

$$w = \frac{(v + u)}{1 + uv/c^2}$$

Wenn ein Bus mit der Geschwindigkeit v fährt und sich ein Mitfahrer im Bus mit der Geschwindigkeit u nach vorne bewegt, bewegt sich der Mitfahrer relativ zu einem am Strassenrand ruhenden Beobachter mit der Geschwindigkeit $w = u + v$.

Diese (gemäss Newton und Galilei Transformation gültige) Formel für die Addition von Geschwindigkeiten kann in der SRT nicht korrekt sein, weil dies für schnell bewegte Körper ...

$$0.7c + 0.8c = 1.5c$$

auf Geschwindigkeiten führen würde, die grösser als die Lichtgeschwindigkeit wären. Dies ist nicht möglich!

Was muss geändert werden? Wie werden Geschwindigkeiten gemäss der SRT addiert?

Wir haben in der oben beschriebenen Situation drei Koordinatensysteme ...

- Koordinatensystem K ruhend
- Koordinatensystem K' bewegt sich mit der Geschwindigkeit v gegenüber K
- Koordinatensystem K'' bewegt sich mit der Geschwindigkeit u gegenüber K'

Die wiederholte Anwendung der Lorentz Transformation auf x'' , x' und t' liefert die folgende Beziehung für x'' ...

$$x'' \stackrel{\text{LT}}{=} \frac{x' - ut'}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \stackrel{\text{LT}}{=} \frac{\frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - u \frac{(t - \frac{v}{c^2}x)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} = \frac{x - vt - ut + \frac{uv}{c^2}x}{\sqrt{1 - (v/c)^2} * \sqrt{1 - (u/c)^2}} = \frac{x(1 + \frac{uv}{c^2}) - (v + u)t}{\sqrt{1 - (v/c)^2} * \sqrt{1 - (u/c)^2}}$$

Die entscheidende Idee ist nun, dass $x'' = 0$ die Weltlinie von K'' ist.

Dies bedeutet, dass der Zähler im obigen Ausdruck gleich 0 ist ...

$$x(1 + \frac{uv}{c^2}) - (v + u)t = 0$$

$$x = \frac{(v+u)}{1 + \frac{uv}{c^2}} t$$

Das Koordinatensystem K'' bewegt sich somit in K mit der Geschwindigkeit ...

$$w = \frac{(v+u)}{1 + \frac{uv}{c^2}}$$

Dies ist die Formel für die Addition von Geschwindigkeiten in der SRT.

Drei Beispiele sollen dies illustrieren ...

$$\begin{aligned} u = v = 0.01c &\quad \rightarrow \quad w = 0.019998c \\ u = v = 0.9c &\quad \rightarrow \quad w = 0.019998 = \frac{1.8}{1.81}c = 0.994475c \\ u = v = c &\quad \rightarrow \quad w = \frac{(c+c)}{1 + \frac{c \cdot c}{c^2}} = \frac{2c}{1+1} = c \end{aligned}$$

Wir sehen, dass die Geschwindigkeit w nie grösser als die Lichtgeschwindigkeit c wird.

Invarianten der SRT

Es gibt verschiedene physikalische Grössen, die in jedem Inertialsystem gleich sind. Dies betrifft insbesondere die Lichtgeschwindigkeit c , die Masse m sowie die Eigenzeit τ .

Lichtgeschwindigkeit c

Der Betrag der Lichtgeschwindigkeit c wurde bei der Herleitung der SRT Gleichungen als konstant vorausgesetzt, da in vielen früheren Experimenten keine Abweichung festgestellt werden konnte.

Masse m

Die Masse m ist auch eine skalare physikalische Grösse, die eine Eigenschaft des betrachteten Körpers oder Elementarteilchens ist, und in verschiedenen Inertialsystemen gleich ist.

Dies war jedoch nicht immer so. Die Bezeichnung hat folgendermassen geändert:

Früher	Ruhemasse	m_0	Geschwindigkeitsabhängige Masse	m
	Ruheenergie	$E_0 = m_0 c^2$	Ruhe plus Bewegungsenergie	$E = m c^2$
Heute	Ruhemasse	m	Geschwindigkeitsabhängige Masse	γm
	Ruheenergie	$E_0 = m c^2$	Ruhe plus Bewegungsenergie	$E = m \gamma c^2$

Somit ist auch die berühmteste Formel der Physik $E = m c^2$ so heute nicht mehr korrekt.

Eigenzeit und Raumzeit Intervall

Es gibt jedoch noch eine weitere (aus den Koordinaten zusammengesetzte) konstante Grösse: das Raumzeitintervall bzw. die Eigenzeit.

Wir kennen schon vom Euklidischen Raum, dass sich der Abstand von zwei Punkten nicht ändert, wenn das Koordinatensystem rotiert oder verschoben wird. Mathematisch bedeutet dies, dass die folgenden Gleichungen gelten ...

$$(1) \quad \Delta x^2 + \Delta y^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 \quad \text{im 2-dimensionalen Raum}$$

$$(2) \quad \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 \quad \text{im 3-dimensionalen Raum}$$

Die Δ 's sind folgendermassen definiert:

$$2D \quad \text{für die Punkte } P_1 = \{x_1, y_1\}, P_2 = \{x_2, y_2\}: \Delta x = x_2 - x_1, \Delta y = y_2 - y_1$$

$$3D \quad \text{analog}$$

Diese Beziehungen sind nichts anderes als der Satz des Pythagoras.

Etwas ähnliches gilt bei der SRT bzw. der Lorentz Transformation, nämlich für das sogenannte **Raumzeitintervall Δs** , das folgendermassen definiert ist ...

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - c^2 \Delta t'^2$$

Wir sehen, dass dieser Ausdruck Ähnlichkeiten zum Satz des Pythagoras im Raum hat. Der grosse Unterschied ist das andere Vorzeichen vor dem Ausdruck $c^2 \Delta t^2$. Dieses Vorzeichen ist der Grund für die ungewohnten Effekte der SRT.

Da bei den in diesem Skript betrachteten Bewegungen entlang der x-Achse $\Delta y = \Delta y'$ und $\Delta z = \Delta z'$ gilt, können wir kürzer schreiben ...

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 = \Delta x'^2 - c^2 \Delta t'^2$$

Ein weiterer wichtiger Begriff ist die sogenannte **Eigenzeit** (engl. proper time), die definiert wird gemäss ...

$$\Delta \tau^2 = -\left(\frac{\Delta s}{c}\right)^2$$

und für die somit gilt ...

$$\Delta \tau'^2 = \Delta t'^2 - \left(\frac{\Delta x'}{c}\right)^2 = \Delta t^2 - \left(\frac{\Delta x}{c}\right)^2$$

Diese Invariante (ändert sich bei der Lorentz Transformation bzw. einer Relativbewegung der Koordinatensysteme nicht) ist nicht nur eine abstrakte Grösse, sondern hat eine physikalische (ja sogar experimentelle) Bedeutung, nämlich ...

Die invariante Eigenzeit $\Delta \tau$ entlang einer Weltlinie ist die Zeit, die eine mitbewegte Uhr misst.

Wir können leicht mit Hilfe der Lorentz Transformation einsehen, dass dies eine Invariante ist. Wir betrachten zwei Ereignisse ...

Im Koordinatensystem K gilt ...

Ereignis 1 = $\{x, t\}$ und Ereignis 2 = $\{0, 0\}$

$$\Delta \tau^2 = \Delta t^2 - \left(\frac{\Delta x}{c}\right)^2 = (t-0)^2 - \left(\frac{x-0}{c}\right)^2 = t^2 - \left(\frac{x}{c}\right)^2$$

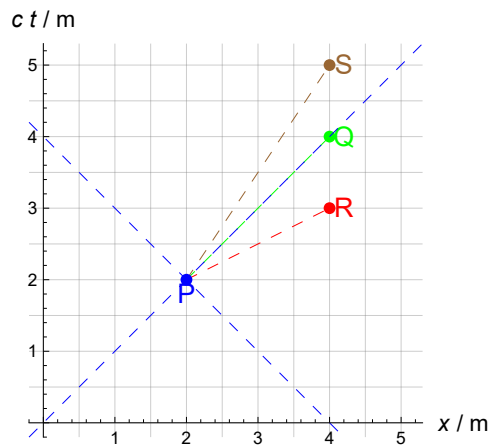
Im Koordinatensystem K' gilt für die gleichen zwei Ereignisse (Lorentz Transformation) ...

Ereignis 1 = $\{x' = \gamma(x - vt), t' = \gamma(t - \beta \frac{x}{c})\}$ und Ereignis 2 = $\{x' = 0, t' = 0\}$

$$\begin{aligned} \Delta \tau'^2 &= \Delta t'^2 - \left(\frac{\Delta x'}{c}\right)^2 = (\gamma(t - \beta \frac{x}{c}) - 0)^2 - \left(\frac{\gamma(x - vt) - 0}{c}\right)^2 = \gamma^2 (t - \beta \frac{x}{c})^2 - \gamma^2 \left(\frac{x}{c} - \beta t\right)^2 \\ &= \gamma^2 \left(t^2 - \frac{2t\beta x}{c} + \frac{\beta^2 x^2}{c^2} - \frac{x^2}{c^2} + \frac{2x\beta t}{c} - \beta^2 t^2 \right) \\ &= \gamma^2 t^2 (1 - \beta^2) - \gamma^2 \frac{x^2}{c^2} (1 - \beta^2) \\ &= t^2 - \left(\frac{x}{c}\right)^2 \quad \text{denn:} \quad \gamma^2 (1 - \beta^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right)^2 (1 - \beta^2) = 1 \end{aligned}$$

Wir sehen somit, dass $\Delta \tau^2 = \Delta \tau'^2$ eine Invariante ist.

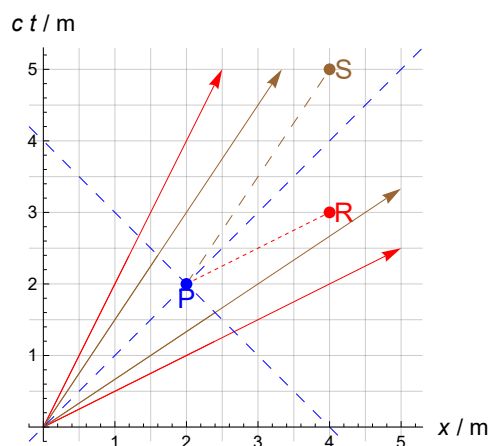
Das Vorzeichen von $\Delta\tau^2$ (oder auch Δs^2) hat eine spezielle Bedeutung. Wir unterscheiden drei Situationen, in welcher Beziehung zwei Ereignisse (Punkte im Minkowski Diagramm) stehen können. Dazu hilft das folgende Diagramm.



Aus dem Diagramm entnehmen wir:

- Da sich Signale maximal mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten können, kann das Ereignis P (blauer Punkt)
 - nur Ereignisse beeinflussen, die im Vorwärts Lichtkegel von P liegen (in der Zukunft).
 - nur von Ereignissen beeinflusst werden, die im Rückwärts Lichtkegel von P liegen (in der Vergangenheit).
- $\Delta s^2 = \Delta x^2 - (c \Delta t)^2$
 - Δs^2 (Blau/Brown) = $(4-2)^2 - (5-2)^2 = 4-9 = -5 < 0$ zeitartige Separation der Ereignisse
 - Δs^2 (Blau/Grün) = $(4-2)^2 - (4-2)^2 = 4-4 = 0$ lichtartige Separation der Ereignisse
 - Δs^2 (Blau/Rot) = $(4-2)^2 - (3-2)^2 = 4-1 = 3 > 0$ raumartige Separation der Ereignisse
- Licht- und zeitartig separierte Ereignisse können kausal verknüpft sein.
- Raumartig separierte Ereignisse können nicht kausal verknüpft sein. Dazu müsste das Signal mit Überlichtgeschwindigkeit propagieren.
- Da Δs^2 eine Invariante ist, gilt die zeitartige/lichtartige/raumartige Separation zweier Ereignisse für alle Inertialsysteme.
- $\Delta s^2 = 0$ bedeutet nicht, dass es sich um das gleiche Ereignis handelt. Es bedeutet, dass diese zwei Ereignisse durch einen Lichtstrahl (Steigung ± 1 im Minkowski Diagramm) miteinander verbunden werden können.

Für zeitartig separierte Ereignisse kann ein Inertialsystem gefunden werden, so dass die Ereignisse am gleichen Ort stattfinden und für raumartig separierte Ereignisse kann ein Inertialsystem gefunden werden, so dass die Ereignisse zur gleichen Zeit stattfinden. Dies illustriert die folgende Abbildung.



Die Ereignisse P und S sind **zeitartig** verbunden ($c \Delta t$ ist grösser als Δx): für das **braune** Inertialsystem sind die Ereignisse P und S am gleichen Ort. Die Linie PS verläuft parallel zur t' -Achse des braunen

Koordinatensystems (d.h. gleicher Ort).

Die Ereignisse P und R sind **raumartig** verbunden ($c \Delta t$ ist kleiner als Δx): für das **rote** Inertialsystem sind die Ereignisse P und R zur gleichen Zeit. Die Linie PR verläuft parallel zur x' -Achse des roten Koordinatensystems (d.h. gleiche Zeit).

Alternative Schreibweisen der Lorentz Transformation

Die Lorentz Transformation kann auf verschiedene Arten geschrieben werden. Hier sollen kurz einige Darstellungen aufgeführt werden.

Die Transformation für y' und z' wird unten nicht aufgelistet, da für (die hier betrachteten) Bewegungen in x -Richtung die Transformationen für x' und t' in den unterschiedlichen Darstellungen allesamt gleich sind: $y' = y$ und $z' = z$.

Im Folgenden ist die Transformation für t' sowohl für ct' (ideal für Abbildungen) als auch für t' angegeben.

Koordinatenschreibweise v, c

Ausführlich mit Koordinaten geschrieben lautet die Lorentz Transformation ...

$$\text{mit Variable } t \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\text{mit Variable } ct \quad ct' = \frac{ct - \frac{v}{c} x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad x' = \frac{x - \frac{v}{c} ct}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Mit β und γ geschrieben v, β, γ

Mit den Definitionen $\beta = \frac{v}{c}$ und $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ lautet die Lorentz Transformation ...

$$\text{mit Variable } t' \quad t' = \gamma \left(t - \beta \frac{x}{c} \right) \quad x' = \gamma (x - vt)$$

$$\text{mit Variable } ct' \quad ct' = \gamma (ct - \beta x) \quad x' = \gamma (x - \beta ct)$$

Mit $c = 1$ geschrieben $c = 1, v, (\gamma)$

Die Physiker führen in vielen Fachgebieten eine eigene Notation ein, um weniger schreiben zu müssen. So auch in der SRT, wo häufig $c = 1$ gesetzt wird.

Dies ist natürlich Unsinn, dass eine Geschwindigkeit gleich einer Zahl gesetzt wird. Dies wird jedoch so interpretiert, dass die Geschwindigkeiten relativ zur Lichtgeschwindigkeit angegeben werden müssen. Der Vorteil ist, dass die Gleichungen dann einfacher aussehen und mit ihnen einfacher gerechnet werden kann. Am Schluss setzt man dann überall c, c^2, \dots so ein, dass die Gleichungen in Bezug auf ihre Dimensionen wieder korrekt sind.

Die Lorentz Transformation lautet dann so ($c = 1, \beta = v, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$) ...

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} (t - vx) = \gamma (t - vx)$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} (x - vt) = \gamma (x - vt)$$

Für die Weltlinie eines Lichtstrahls wird aus $x = c t$ die einfache Beziehung $x = t$. Hier sieht man direkt, dass der Lichtstrahl die Steigung 1 hat.

Für die Achsen des Koordinatensystems K' ergibt sich:

- t' -Achse $x = v t$ wird nicht verändert
- x' -Achse aus $x = t c^2 / v$ wird $x = t / v$

Man sieht sofort:

- die t' -Achse hat (wegen $x = v t$ bzw. $t = \frac{1}{v} x$) die Steigung $\frac{1}{v}$
 - die x' -Achse hat (wegen $x = t / v$ bzw. $t = v t$) hat die Steigung v
- im Minkowski Diagramm, wo die Zeitachsen nach oben eingetragen werden.
Dies heisst auch, dass x' aus t' durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden herausgeht.

Wir verwenden diese Notation in diesem Skript NICHT.

Vierdimensionale Vektoren

Newton betrachtete Raum und Zeit als vollständig separat: ein 3-dimensionaler Euklidischer Raum war Raum und die Zeit war universell.

In der SRT werden gemäss der Lorentz Transformation die **Raumkoordinate x und die Zeitkoordinate t vermischt**, wenn man vom System K zum System K' übergeht.

Wie die 3 räumlichen Koordinaten x, y, z in einem Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ zusammengefasst werden können, erkannte

Minkowski (übrigens ein Lehrer von Einstein an der ETH Zürich), dass auch die Koordinaten t, x, y, z in einem 4-dimensionalen Vektor zusammengefasst werden konnten (Link):

Um 1907 erkannte Minkowski, dass die Arbeiten von Hendrik Antoon Lorentz (1904) und Albert Einstein (1905) zur Relativitätstheorie in einem nicht-euklidischen Raum verstanden werden können. Er vermutete, dass Raum und Zeit in einem vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum miteinander verbunden sind und verfasste Abhandlungen über eine vierdimensionale Elektrodynamik. Minkowski hielt darüber 1908 den aufsehenerregenden Vortrag Raum und Zeit auf der Versammlung der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte:

*“Die Anschauungen über Raum und Zeit, die ich ihnen entwickeln möchte, sind auf experimentell-physikalischen Boden erwachsen. Darin liegt ihre Stärke. Ihre Tendenz ist eine radikale. **Von Stund’ an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren.**“*

Minkowski fasste somit die 4 Koordinaten $\{t, x, y, z\}$ der Lorentz Transformation zu einem 4-Vektor zusammen, der heute meist folgendermassen geschrieben wird ...

$$4D: \quad X^\mu = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^0 \\ X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix} \quad 3D \text{ (nur Raumkoordinaten):} \quad \vec{X} = X^i = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix}$$

Dass die Zeitkoordinate zuerst steht, ist Konvention.

Wir können auch (neben den Koordinaten) allgemeine 4-Vektoren definieren, und zwar folgendermassen:

Ein 4-Vektor A^μ ist ein Satz von 4 Komponenten,

- die sich bei einem boost gemäss der Lorentz Transformation transformieren,
- deren 3 räumliche Koordinaten A^i sich bei einer Rotation wie konventionelle Vektoren transformieren
- und deren zeitliche Koordinate A^0 sich bei einer Rotation nicht ändert.

Mit Hilfe dieser 4-Vektoren und der Matrix η ...

$$\eta = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v/c^2 & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie der Matrixmultiplikation können die vier Lorentztransformationgleichungen kurz und prägnant (Physiker lieben abgekürzte Schreibweisen) geschrieben werden ...

$$(X^\mu)' = \eta X^\mu$$

Dies ist keine neue Physik bzw. neue Gleichung. Dies ist nur Notation. Bei der obigen Matrixmultiplikation ηX^μ wird zur Berechnung der 1. Zeile des resultierenden Vektors $(X^0)'$ die erste Zeile der Matrix

$\{\gamma, -\gamma v/c^2, 0, 0\}$ mit dem Spaltenvektor $\begin{pmatrix} X^0 \\ X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix}$ - analog zur Berechnung des Skalarprodukts - ausmulti-

pliziert ...

$$(X^\mu)' = \eta X^\mu \stackrel{\text{explizit}}{=} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v/c^2 & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X^0 \\ X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma X^0 - \gamma v/c^2 X^1 \\ -\gamma v X^0 + \gamma X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(t - v/c^2 x) \\ \gamma(x - vt) \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Zunächst war Einstein ablehnend bei der Verwendung der 4-Vektoren. Später erkannte er den Wert und verwendete sie bei der Entwicklung der ART.

$$E = m c^2$$

Ein Vortrag über die SRT muss natürlich auch die berühmteste Formel der Physik erwähnen ...

$$E = m c^2 \quad \text{nicht mehr korrekt}$$

Wie schon erwähnt wird heute m anders gedeutet, nämlich ...

$$\text{Gesamtenergie} \quad E = m \gamma c^2$$

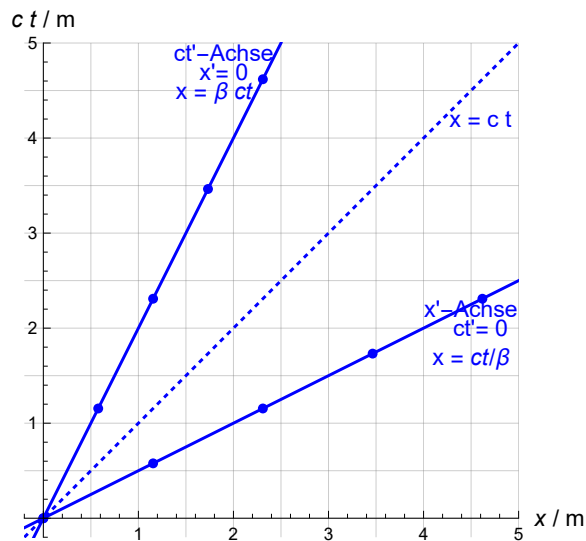
$$\text{Ruheenergie} \quad E_0 = m c^2$$

Die Herleitung dieser Formel erfordert zusätzliche Physikkenntnisse (u.a. Differentialrechnung, Lagrange und Hamilton Funktionen) und wird in diesem Vortrag nicht weiter verfolgt.

In einem späteren Skript über die SRT soll dies dann wieder aufgenommen werden.

Phänomene

Mit Hilfe des Minkowski Diagramms und den beiden Koordinatensystemen K (ruhend) und K' (bewegt sich mit der Geschwindigkeit v gegenüber K) ...



werden wir im Folgenden verschiedene überraschende Phänomene der SRT untersuchen.

Phänomen: Längenkontraktion (engl. length contraction)

Die **Längenkontraktion** besagt, dass sich ein bewegter Körper in Bewegungsrichtung verkürzt.

Wir analysieren die Längenkontraktion in zwei verschiedenen Situationen. Im Fall A ruht der Stab in K, im Fall B ruht der Stab in K'. In beiden Fällen vergleichen wir die Längenmessungen in K und K'.

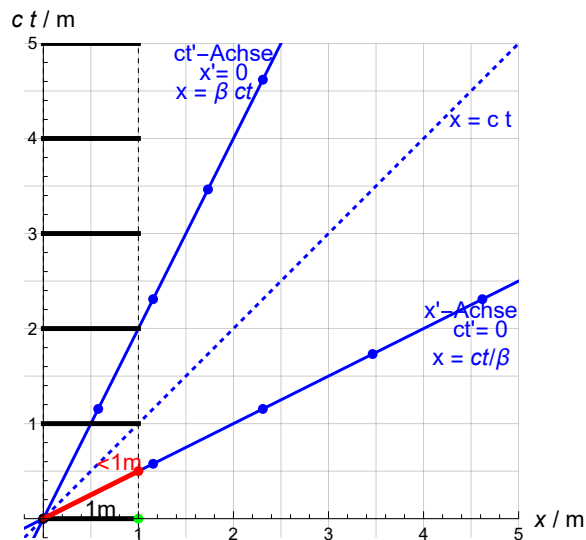


Abbildung Fall A

- Der Stab ruht im Koordinatensystem K und hat in K die Länge 1m
- In Bezug auf K' bewegt er sich somit mit der Geschwindigkeit $-v$.
- In der Abbildung, wo auch die Skalierungen eingetragen sind, sehen wir direkt, dass in K' die Länge (rot) des Stabs kleiner als 1 m ist. Wir haben $x' < x$. Wir erinnern uns: Die beiden Endpunkte des Stabes müssen gleichzeitig gemessen werden.
- Der Beobachter in K', der sich gegenüber dem Stab bewegt, misst eine kleinere/kontrahierte Länge: **Längenkontraktion.**

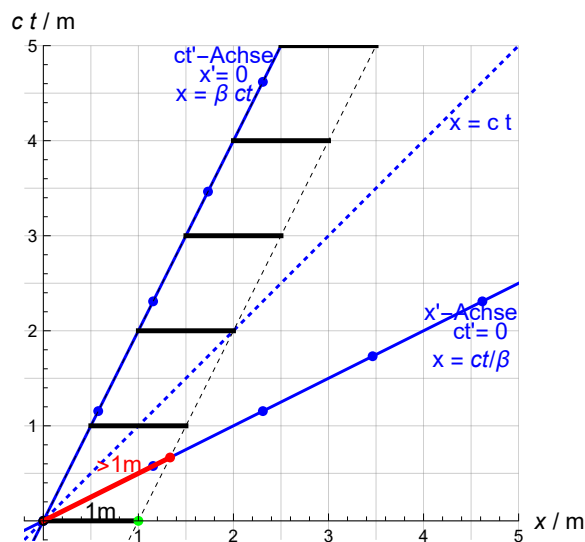


Abbildung Fall B

- Der Stab ruht im Koordinatensystem K' und hat in K die Länge 1m .
- In Bezug auf K bewegt er sich somit mit der Geschwindigkeit v .
- In der Abbildung, wo auch die Skalierungen eingetragen sind, sehen wir direkt, dass in K' die Länge des Stabs grösser als 1m ist. Wir haben $x' > x$.
- Der Beobachter in K , der sich gegenüber dem Stab bewegt, misst eine kleinere/kontrahierte Länge:
Längenkontraktion.

Quantitativ

Wir können die Längenkontraktion mit Hilfe der Lorentz Transformation auch quantitativ angeben.

- Die Koordinaten der Endpunkte des Stabs seien im Inertialsystem K (gleichzeitig $t_P = t_Q = 0$) und der Stab habe die Länge L ...

$K:$	P	$\{x_P, t_P\} = \{0, 0\}$	schwarzer Punkt
	Q	$\{x_Q, t_Q\} = \{L, 0\}$	grüner Punkt

- Für den Koordinatenursprung P gilt auch $t'_P = 0$. Somit muss (für eine gleichzeitige Messung) R auf der x' -Achse (für die ja per definitionem $t' = 0$ gilt) liegen. Die x' -Achse die Gleichung $t = \frac{v}{c^2} x$.

R	$\{x_R, t_R\} = \left\{L, \frac{v}{c^2} L\right\}$	roter Punkt
-----	--	-------------

- Einsetzen in die Lorentz Transformation liefert ...

$$L' = \gamma(x_R - v t_R) - \gamma(x_P - v t_P) = \gamma\left(L - v \frac{v}{c^2} L\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (1-\beta^2) L = \sqrt{1-\beta^2} L$$

- Das heisst $L' < L$

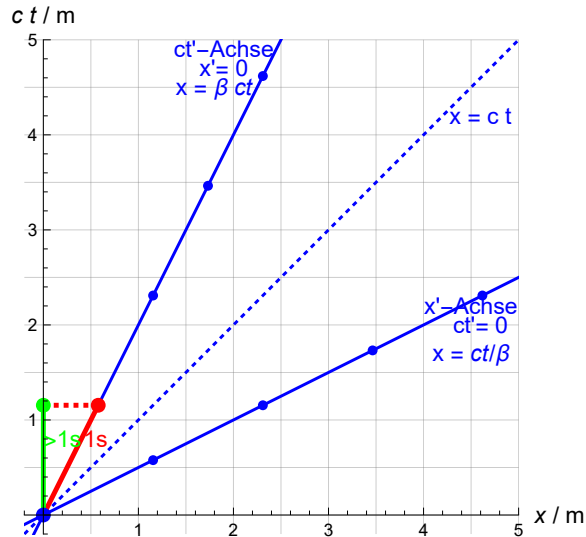
- In K' wird eine um den Faktor $\sqrt{1-\beta^2}$ kleinere Länge gemessen. Wir haben die sogenannte **Längenkontraktion!**

Phänomen: Zeitdilatation (engl. time dilation)

Die **Zeitdilatation** besagt, dass in einem bewegten Körper die Uhren langsamer laufen.

Wir haben zwei Ereignisse und analysieren die Zeitdauer, die von einem ruhenden Beobachter und einem bewegten Beobachter gemessen werden.

Relevant ist die folgende Abbildung.



In der Abbildung haben wir das Ereignis $\{x', t'\} = \{0, 1\}$ eingetragen (magenta). Aus der Zeichnung würde man vermuten (wenn man nur die Zeitabstände vom Ursprung $t = t' = 0$ betrachtet), dass die entsprechende Zeit in t (Kathete) kleiner als t' (Hypotenuse) ist.

Wichtig ist aber, dass wir auch die Skalierung in K und K' betrachten! Dann gilt:

$$t > t'$$

Die bewegte Uhr läuft langsamer! Wir haben die sogenannte **Zeitdilatation**.

Wir können dies auch noch quantitativ betrachten:

- Wir haben die Ereignisse

P	$\{x_P, t_P\} = \{x_{P'}, t_{P'}\} = \{0, 0\}$	blauer Punkt
Q	$\{x_Q, t_Q\} = \{0, 1\text{ s}\}$	roter Punkt

- Die Lorentz Transformation liefert uns dann die folgende Zeitdauer Δt für K ...

$$\Delta t = t_Q - t_P = \gamma \left(t_Q' + \beta \frac{x_Q'}{c} \right) - \gamma \left(t_P' + \beta \frac{x_P'}{c} \right) = \gamma (t_Q' - t_P') = \gamma \Delta t' \geq \Delta t'$$

→ $\Delta t \geq \Delta t'$

- Die bewegte Uhr läuft um den Faktor $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ langsamer.

Aber nicht nur bewegte Uhren laufen langsamer. Auch alle biologischen Prozesse laufen langsamer ab.

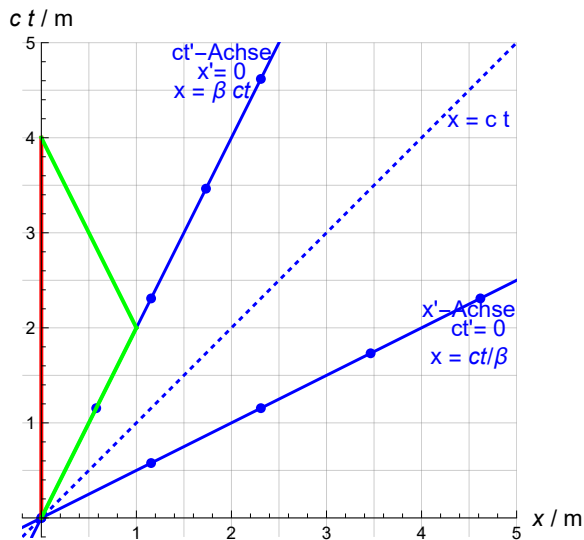
Dass die Zeitdilatation eine reelle Tatsache ist wird durch die Lebensdauer eines Muon illustriert.

- Im Labor, wo langsame Muonen produziert werden können, hat das Muon eine Lebensdauer von $2.197 \mu\text{s}$.
- Kosmische Strahlen erzeugen in der oberen Atmosphäre (zirka 10 - 30 km) Muonen. Wenn sich diese Muonen mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, bräuchten sie beispielsweise $t = \frac{10000\text{ m}}{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \approx 1.17\text{ s}$ bis zur Erdoberfläche. Es sollten also die meisten zerfallen sein. Nur weil die Zeit für die Muonen langsamer läuft, kann die Anzahl der Muonen, die die Erde erreicht, erklärt werden. (Vgl. Link)

Phänomen: Zwillingsparadoxon

Das Zwillingsparadoxon ist das folgende Gedankenexperiment: Ein Zwilling Z1 fliegt mit nahezu Lichtgeschwindigkeit zu einem fernen Stern, während der andere Zwilling Z2 auf der Erde zurückbleibt. Anschliessend kehrt der erste Zwilling um und fliegt mit der gleichen Geschwindigkeit zurück. Nach der Rückkehr stellt sich heraus, dass der zu Hause Gebliebene viel älter ist als der Gereiste.

Der Altersunterschied hängt von der Geschwindigkeit und auch der Entfernung des Sterns ab. Illustriert wird das Ganze mit Hilfe des folgenden Diagramms. Der Effekt beruht auf der Zeitdilatation.



Wir sehen, dass für den ruhenden Beobachter mehr Zeit verstrichen ist.

- für den ruhenden Beobachter (rote Linie): $ct = 4 \text{ m}$
- für den bewegten Beobachter (grüne Linien): $ct \stackrel{\text{abgeschätzt}}{=} 3.5 \text{ m}$

Die Situation für die beiden Zwillinge Z1 und Z2 ist nicht durchgängig symmetrisch:

- Die Situation ist symmetrisch bis zur Umkehrung.
- Z2 befindet sich durchgängig in einem Inertialsystem.
- Z1 erfährt eine Beschleunigung bei der Umkehrung und befindet sich deshalb nicht durchgängig in einem Inertialsystem.
- Die Gerade der Gleichzeitigkeit wechselt bei der Umkehrung.

Allgemeine Relativitätstheorie (ART, mit Gravitation)

Einleitung

Während bei der Entwicklung der SRT bzw. der Herleitung der (heute so genannten) Lorentz Transformation Einstein auf viele Vorarbeiten zurückgreifen konnte, insbesondere (Link) ...

- Galileo **Galilei** mit seinem Relativitätsprinzip
- dem **Michelson-Morley**-Experiment (1887), das keine Relativbewegung zwischen Erde und Äther (Ätherdrift) aufzeigen konnte;
- der Kontraktionshypothese von George **FitzGerald** (1889) und Hendrik Antoon **Lorentz** (1892), mit der das Michelson-Morley-Experiment erklärt werden sollte; ...
- der Lorentz Transformation von **Lorentz** (1892, 1899) und Joseph **Larmor** (1897), die eine Veränderung der Zeitvariablen beinhaltete, und mit der generell die negativen Ätherdriftexperimente erklärt werden sollten; ...
- dem Relativitätsprinzip (1900, 1904), der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit (1898, 1904), und der Relativität der Gleichzeitigkeit (1898, 1900) durch Henri **Poincaré**, der jedoch am Äthergedanken festhielt;
- sowie dem Erreichen der vollen Kovarianz der elektrodynamischen Grundgleichungen durch **Lorentz** (1904) und **Poincaré** (1905) in der lorentzschen Äthertheorie.

entwickelte Einstein die Gleichungen der ART von 1907 bis 1915 fast im Alleingang.

Aber auch die Physik der Gravitation und Relativität allgemein hatte viele Vorläufer. Eine wunderbare Zusammenstellung der Zeitleiste ...

von	3rd century B.C.	Aristarchus of Samos proposes the heliocentric model.
	...	
bis	2024	The Large High Altitude Air Shower Observatory (LHAASO) collaboration imposes stringent limits on violations of Lorentz invariance proposed in certain theories of quantum gravity using GRB 221009A.

mit vielen Links kann auf Wikipedia gefunden werden (Link).

Warum braucht es die ART (Allgemeine Relativitäts Theorie)?

Warum war es überhaupt notwendig, die Newton'sche Gravitationstheorie ...

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \text{Newton (1687)}$$

besser $\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}_0$ als Vektorgleichung; denn die Kraft hat auch eine Richtung.

weiter zu entwickeln? Diese Theorie funktionierte doch sehr gut für das Sonnensystem und die Planetenbewegungen. Von der experimentellen Seite gab es nur ein Phänomen, das noch nicht erklärt werden konnte: die Periheldrehung des Merkurs (siehe weiter hinten).

Für Einstein war das Newton'sche Gravitationsgesetz jedoch auch ein Problem in Bezug auf seine SRT. Das Newton'sche Gesetz bedeutet, dass die Kraft zwischen zwei Massen sofort wirkt (es ist keine Zeitverzögerung in die Gleichung eingebaut). Wie kann dies sein, da doch gemäss der SRT die Lichtgeschwindigkeit die maximal mögliche Geschwindigkeit für die Ausbreitung von Signalen bedeutet?

Mit anderen Worten:

Das Newtonsche Gravitationsgesetz ist im Widerspruch zur SRT.
Dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit maximal gleich c sein kann, ist nicht berücksichtigt.

Für die Herleitung der ART stützte sich Einstein (neben der SRT, der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und die 4-dim Raumzeit) auf zwei Prinzipien der SRT, die er entsprechend erweiterte: das allgemeine Relativitätsprinzip und das starke Äquivalenzprinzip.

1. Prinzip Allgemeines Relativitätsprinzip

Das Relativitätsprinzip der SRT haben wir schon bei der SRT kennengelernt. Dieses Prinzip wird nun erweitert.

Das **allgemeine** Relativitätsprinzip besagt ...

Die Gesetze der Physik haben nicht nur in allen Inertialsystemen, sondern in allen (auch beschleunigten) Koordinatensystemen die gleiche Form.

2. Prinzip Starkes Äquivalenzprinzip

Auch das Äquivalenzprinzip haben wir schon in der SRT kennengelernt. Es besagt, dass die träge Masse und die schwere Masse gleich gross sind. Einstein erweitert auch dieses Prinzip. Das Einsteinsche **starke Äquivalenzprinzip** besagt ...

In kleinen Raumzeit Regionen sind die Effekte der Gravitation äquivalent zu denen in einem beschleunigten Referenzrahmen. Kein Experiment kann in einem abgeschlossenen Raumschiff durchgeführt werden, das zeigen würde, ob das Raumschiff sich beschleunigt im Raum bewegt oder ob es ruhig auf dem Boden steht.

In kleinen Raumzeit Regionen reduzieren sich die Gleichungen der Physik auf jene der (nicht gravitationellen) SRT.

Das Äquivalenzprinzip wird häufig mit der folgenden Abbildung dargestellt.

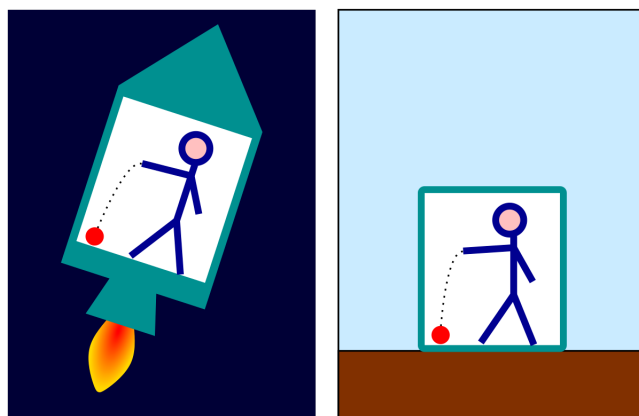


Abbildung: Äquivalenz (Bildquelle). Der Ball fällt gleich, ob wir ein beschleunigtes Raumschiff oder eine Gravitationskraft haben.

Einstein betrachtete diese seine Erkenntnis im Jahre 1908 (nämlich die Äquivalenz von Beschleunigungen und Gravitation) als den glücklichsten Gedanken seines Lebens .

Wegen den Gezeitenkräften (vgl. Ebbe und Flut) gilt dies jedoch nur lokal (kleine Regionen, kleine Körper).

Ein ausgedehnter, in Richtung Gravizentrum fallender Körper wird eine Kraft erfahren, die ihn in Längsrichtung zum Gravizentrum (Fallrichtung) auseinanderzieht und in Querrichtung zum Gravizentrum (Fallrichtung)

zusammendrückt im Gegensatz zum beschleunigten System, in dem die Kräfte auf Grund der Beschleunigung überall in die gleiche Richtung weisen.

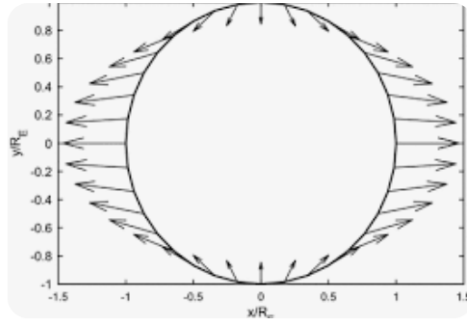


Abbildung: Gezeitenkräfte (Bildquelle)

Theorie

Einleitung

Die ART beinhaltet recht anspruchsvolle Mathematik (Differentialgeometrie, Tensoren, ...). Konkrete Berechnungen von Hand beinhalten deshalb schnell mehrere zig/hundert Seiten. Es macht deshalb Sinn, für konkrete Berechnungen Computerprogramme zu verwenden. Auf diese werden wir in diesem Skript nicht weiter eingehen.

Selbst Einstein hatte den für die ART notwendigen mathematischen Hintergrund nicht und musste auf die Hilfe des Mathematikers und ehemaligen Studienkollegen an der ETH Marcel Grossmann zurückgreifen und die notwendige Mathematik zuerst lernen: insbesondere die von Carl Friedrich **Gauss**, Bernhard **Riemann**, Elwin Bruno **Christoffel**, Gregorio **Ricci-Curbastro** und Tullio **Levi-Civita** entwickelte Differentialgeometrie.

Die ART wurde von Albert Einstein (fast im Alleingang) von 1907 bis 1915 entwickelt. Wichtige Meilensteine dieses Prozesses sind ...

- 1908 Einstein Zeitdilatation und Rotverschiebung im Gravitationsfeld
- 1911 Einstein Wirkung der Gravitation auf Licht. Rotverschiebung.
- 1915 Einstein ART - Einstein'sche Feldgleichungen
- 1916 Hilbert Wirkungsfunktion der ART (engl. Einstein-Hilbert Action)

Auf die Einstein'schen Feldgleichungen und die Herleitung von Hilbert soll im Folgenden kurz eingegangen werden.

1915 Einstein ART - Einstein'sche Feldgleichungen

Das Ergebnis der Bemühungen von Einstein sind die sogenannten Einstein'schen Feldgleichungen, die hier in der allgemeinen Form mit der kosmologischen Konstante geschrieben sind. Es sind eigentlich 16 Gleichungen, die abgekürzt als eine Gleichung geschrieben werden kann (Physiker erfinden immer wieder eine passende Notation, damit sie weniger schreiben müssen).

$$\boxed{G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}} \quad \mu, \nu \text{ gehen jeweils von 0 bis 3} \quad (\text{vierdimensionale Raumzeit})$$

Häufig wird diese Gleichung auch mit Hilfe des Ricci Krümmungstensors ($G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu}$) geschrieben ...

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}}$$

Diese Tensorgleichung besteht eigentlich aus 16 verschiedenen Gleichungen. Sie enthalten ...

Tensoren

Diese kann man auch als 2-dim Objekte (Tabellen) schreiben ...

$$(g_{00} \ g_{01} \ g_{02} \ g_{03})$$

$g_{\mu\nu}$	Metrischer Tensor: ermöglicht die Definition von Distanzen und Winkeln.
$R_{\mu\nu}$	Ricci Krümmungstensor: beschreibt die Raumkrümmung
$G_{\mu\nu}$	Einstein-Tensor: beschreibt die Raumkrümmung
$T_{\mu\nu}$	Energie-Impuls Tensor (engl. energy-momentum tensor, stress-energy tensor): beschreibt die lokalen Werte für Energie / Impuls / Druck /

Zug .

Skalare

Dies sind Zahlenwerte plus Einheit.

R Ricci Krümmungsskalar: wird aus $R_{\mu\nu}$ berechnet.

Λ Kosmologische Konstante: die Energie (positiv oder negativ), die dem Raum

eigen ist.

c Lichtgeschwindigkeit (im Vakuum)

G Gravitationskonstante (die gleiche Konstante wie bei Newton).

Ausgeschrieben als Matrizen lauten diese Gleichungen ...

$$\begin{pmatrix} R_{00} & R_{01} & R_{02} & R_{03} \\ R_{10} & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{20} & R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{30} & R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} - \frac{R}{2} \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} + \Lambda \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \frac{8\pi G}{c^4} \begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

Vollständig ausgeschrieben sind es die folgenden 16 Gleichungen ...

$$R_{00} - \frac{R}{2} g_{00} + \Lambda g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00}$$

$$R_{01} - \frac{R}{2} g_{01} + \Lambda g_{01} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{01}$$

$$R_{02} - \frac{R}{2} g_{02} + \Lambda g_{02} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{02}$$

$$R_{03} - \frac{R}{2} g_{03} + \Lambda g_{03} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{03}$$

$$R_{10} - \frac{R}{2} g_{10} + \Lambda g_{10} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{10}$$

$$R_{11} - \frac{R}{2} g_{11} + \Lambda g_{11} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{11}$$

$$R_{12} - \frac{R}{2} g_{12} + \Lambda g_{12} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{12}$$

$$R_{13} - \frac{R}{2} g_{13} + \Lambda g_{13} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{13}$$

$$R_{20} - \frac{R}{2} g_{20} + \Lambda g_{20} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{20}$$

$$R_{21} - \frac{R}{2} g_{21} + \Lambda g_{21} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{21}$$

$$R_{22} - \frac{R}{2} g_{22} + \Lambda g_{22} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{22}$$

$$R_{23} - \frac{R}{2} g_{23} + \Lambda g_{23} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{23}$$

$$R_{30} - \frac{R}{2} g_{30} + \Lambda g_{30} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{30}$$

$$R_{31} - \frac{R}{2} g_{31} + \Lambda g_{31} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{31}$$

$$R_{32} - \frac{R}{2} g_{32} + \Lambda g_{32} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{32}$$

$$R_{33} - \frac{R}{2} g_{33} + \Lambda g_{33} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{33}$$

Wir sehen, die Notation erspart uns viel Schreibearbeit ...

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}}$$

Auf Grund der Symmetrie und der Bianchi Identität reduzieren sich die 16 Gleichungen auf **6 unabhängige nichtlineare Gleichungen**.

- Die rechte Seite der Tensorgleichung enthält die Energien, Massen, Druck und dergleichen.
- Die linke Seite beschreibt die Krümmung des Raumes.

Da die beiden Seiten über die obige Gleichungen zusammenhängen, hat John Wheeler (Link) die ART folgendermassen zusammengefasst ...

“spacetime tells matter how to move; → freie Teilchen on Geodäten
 matter tells spacetime how to curve.” → Einstein’s Feldgleichungen

Einstein glaubte zunächst, dass es zu kompliziert sei, diese Gleichungen zu lösen. Es dauerte jedoch nicht lange, bis Schwarzschild (Link) eine erste Lösung präsentieren konnte.

Was ist ein Tensor?

Die physikalischen Grössen können grob unterteilt werden in die folgenden Kategorien.

Skalare enthalten einen **Zahlenwert** und eine **Einheit**

Beispiele Druck: $p = 10^5$ Pa, Zeit $t = 8$ s

Vektoren enthalten einen Zahlenwert, eine Einheit und eine **Richtung**

Beispiele Geschwindigkeit: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$
 Kraft: $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$

Tensoren 2-ter Ordnung enthalten eine Einheit, erfüllen gewisse Transformationseigenschaften und können als Tabelle (Matrix) dargestellt werden.

Beispiel Metrisches Tensor: $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$

Tensoren höherer Ordnung Es gibt auch Tensoren höherer Ordnung mit entsprechend mehr Indizes.

Eine schöne Übersicht über die Einstein’schen Feldgleichungen gibt auch Ethan Siegel (Link).

1916 Hilbert Wirkungskfunktion der ART (engl. Einstein-Hilbert Action)

Einstein stützte sich bei der Herleitung der Feldgleichungen auf die SRT und die weiter oben genannten Prinzipien.

Im Gegensatz zu Einstein ging Hilbert (Link), der berühmteste Mathematiker seiner Zeit, vom (auch in der Newton’schen Mechanik wichtigen) **Prinzip der kleinsten Wirkung** (engl. principle of least action) aus. Mit Hilfe dieses Prinzips lassen sich die Feldgleichungen allein aus der erstmals von Hilbert angegebenen Wirkungskfunktion $W[g]$...

$$W[g] = \frac{c^4}{16\pi G} \int \sqrt{|\det[g][x]|} R[g][x] dx^4 \quad \text{Einstein-Hilbert Wirkung}$$

herleiten (Link). Auf eine detailliertere Behandlung kann hier nicht eingegangen werden.

Historisch interessant ist ...

Am 20. November 1915, fünf Tage vor Einstein, reichte Hilbert eine Arbeit zur allgemeinen Relativitätstheorie ein, die zur einsteinschen Theorie äquivalent war, allerdings ohne die einsteinschen Feldgleichungen, die aber in

Hilberts Variationsprinzip enthalten sind. Seine Arbeit erschien jedoch erst nach der einsteinschen Arbeit. Hilbert hat niemals die Urheberschaft für die Allgemeine Relativitätstheorie beansprucht und einen öffentlichen „Prioritätenstreit“ zwischen Einstein und Hilbert gab es nicht. (Link)

Kosmologische Konstante (ohne ... mit ... ohne ... mit ...)

Die Theorien der Physik sind nicht in Stein gemeisselt. Neue Experimente und Beobachtungen führen dazu, dass die Theorien und Gleichungen angepasst werden müssen. Die Newton'sche Physik musste durch die SRT, die ART und die Quantenmechanik ersetzt werden. Schön sieht man diesen Prozess der Anpassung auch an der Entwicklung der Einstein'schen Feldgleichungen.

1915 (Oktober) ohne $\frac{R}{2} g_{\mu\nu}$

Im Oktober 1915 veröffentlichte Einstein eine Arbeit über die Periheldrehung des Merkur. In dieser Arbeit ging er von den folgenden Feldgleichungen aus ...

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

1915 (November) ohne Λ

Problem: Diese Gleichung war jedoch nicht korrekt, da sie mit der lokalen Erhaltung von Energie und Impuls nicht verträglich war.

Lösung: Im November 1915 hielt Einstein einen Vortrag über die ART und fügte den zusätzlichen Term $-\frac{R}{2} g_{\mu\nu}$ in die Gleichung ein. **Energie- und Impulserhaltung** waren damit gewährleistet.

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

1917 mit Λ

Problem: Die obige Gleichung ermöglichte kein statisches Universum. Gemäss den Gleichungen und je nach Wert von Λ expandierte oder kontrahierte das Universum. Einstein und andere waren jedoch der Ansicht, dass das Universum statisch sein müsse.

Lösung: Deshalb führte Einstein die sogenannte kosmologische Konstante $\Lambda g_{\mu\nu}$ ein, um ein **statisches Universum** zu erzielen ...

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Die kosmologische Konstante kann als Masse des leeren Raumes (die sowohl negativ als auch positiv sein kann) bzw. als Vakuum Energie aufgefasst werden.

1929 ohne Λ

Problem: Auf Grund der Beobachtungen von Hubble zeigte sich, dass das Universum expandiert.

Lösung: Der Term mit der kosmologischen Konstanten wurde wieder gestrichen. Dies ermöglichte ein **expandierendes Universum**.

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Einstein hat später die Einführung der kosmologischen Konstanten als seinen grössten Fehler bezeichnet. Details dazu können gelesen werden im Beitrag "How Einstein made the biggest blunder of his life" von Ethan Siegel (Link).

1998

mit Λ

Problem: Durch Beobachtungen von Riess, Perlmutter und anderen zeigte sich, dass das Universum nicht nur expandierte (Hubble), sondern sogar beschleunigt expandierte.

Lösung: Um die **beschleunigte Expansion** zu beschreiben, wurde die kosmologische Konstante (als Dunkle Energie bezeichnet) wieder eingeführt.

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Dies ist der aktuelle Stand. Unklar ist zur Zeit, ob Λ wirklich eine Konstante ist, oder sich mit der Zeit ändert.

Weitere Anpassungen könnten notwendig sein.

Newton'sche Gravitation als Grenzfall der ART

Die Newton'sche Gravitationstheorie hat uns über 200 Jahre gute Dienste geleistet und hat mit den Beobachtungen und Experimenten (ausser der Periheldrehung des Merkur) gut übereingestimmt. Sie kann also nicht komplett falsch sein.

Und in der Tat. Es kann gezeigt werden, dass für kleine Gravitationsfelder (bzw. kleine Massen) und langsame Bewegungen die ART in die jahrhundertlang verwendete Newton'sche Gravitationstheorie übergeht. Die (schwierige) ART muss also nur angewandt werden, wenn sehr grosse Massen (Schwarze Löcher) oder sehr genaue Werte (GPS, Atomuhren) notwendig sind.

Experimentelle Bestätigungen der ART

Einstein schlug 1916 drei Tests der ART vor (Link, Link). Diese wurden später klassische Tests der ART genannt:

- die Periheldrehung der Merkurbahn
- die Ablenkung des Lichts durch die Sonne
- die Gravitative Rotverschiebung

Später wurden weitere Tests vorgeschlagen und durchgeführt. Sie sind in den oben angegebenen beiden Links kurz beschrieben.

Bisher haben alle Experimente zur ART die ART (innerhalb der Messgenauigkeit) bestätigt.

1915 Periheldrehung der Merkurbahn

Das erste klassische Experiment betrifft die Periheldrehung der Merkurbahn.

Was bedeutet **Periheldrehung**? Im Sonnensystem durchläuft jeder Planet eine (wegen Gravitationskräften durch die anderen Planeten) nur ungefähre Ellipsenbahn, wobei die Sonne in einem Brennpunkt der Ellipse steht. Der Merkur hat auf seiner Bahn unterschiedliche Abstände von der Sonne. Der Punkt der grössten Annäherung wird Perihel genannt. Periheldrehung bedeutet nun, dass sich das Perihel (die Ellipse) um den gemeinsamen Schwerpunkt dreht. Es gibt mehrere Ursachen für diese Drehung: beispielsweise die Gravitationskräfte durch die anderen Planeten oder die Abplattung der Sonne.

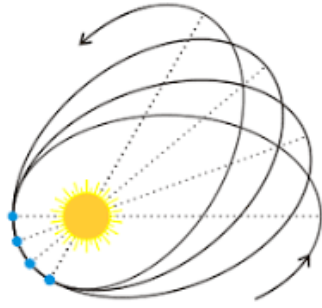


Abbildung: Periheldrehung (Bildquelle)

Gemäss der Newton'schen Gravitationstheorie wäre eine Periheldrehung von zirka 531'' (Bogensekunden) pro Jahrhundert zu erwarten. Bestimmt wurde jedoch durch eine Analyse von Bahndaten aus den Jahren 1697 bis 1848 eine Abweichung von diesem Wert von 38'' (Bogensekunden), die nicht erklärt werden konnte.

Erst mit Hilfe der ART konnte die Messung mit der Theorie in Einklang gebracht werden.

Auch die anderen Planeten erfahren eine Periheldrehung. Diese sind jedoch, da die Planeten weiter entfernt von der Sonne sind, bedeutend kleiner. Aber auch diese Messungen bestätigen die ART. Auch bei Drehungen der Ellipsen bei Binärpulsaren liefern die Messung und die ART das gleiche Ergebnis innerhalb der Messgenauigkeit.

1919 Ablenkung des Lichts durch die Sonne ... Gravitationslinse

Während die Newton'sche Physik annahm, dass sich Licht auf geraden Bahnen ausbreite, postulierte die ART, dass Licht von grossen Massen (z.B. der Sonne) abgelenkt werde. Je näher bei der Masse der Lichtstrahl vorbeigeht, umso mehr. Da jedoch Licht, das sehr nahe bei der Sonne vorbeigeht, vom Sonnenlicht übertrahlt wird, musste man auf eine Sonnenfinsternis warten.

Am 29. Mai 1919 gelang schliesslich Eddington und Dyson anlässlich einer Sonnenfinsternis die Bestätigung der Lichtablenkung. Als sich der Mond vor die Sonne bewegte, konnte beobachtet werden, dass das Licht eines dahinterliegenden Sterns abgelenkt wurde.



Abbildung: Lichtablenkung (Bildquelle)

Diese Messungen wurden wiederholt: 1922 (Lick Observatorium), 1973 (University of Texas at Austin), 1960ff (Radioastronomie). Es resultierte jeweils eine sehr gute Übereinstimmung mit der ART.

Neben der Ablenkung durch die Sonne sind auch Einsteinringe (Link), bei der Galaxien als Gravitationslinsen wirken und für die Lichtablenkung des Lichts einer dahinterliegenden Galaxie verantwortlich sind, ein Beweis für die Gültigkeit der ART.



Abbildung Eine blaue Galaxie wird durch eine rote Galaxie zu einem (fast) Einsteinring abgebildet. (Bildquelle)

The gravity of a luminous red galaxy (LRG) has gravitationally distorted the light from a much more distant blue galaxy. More typically, such light bending results in two discernible images of the distant galaxy, but here the lens alignment is so precise that the background galaxy is distorted into a horseshoe – a nearly complete ring. Credit: ESA/Hubble & NASA. (Link)

1959 Gravitative Rotverschiebung (schwache Gravitationsfelder)

Die gravitative Rotverschiebung ist eine Folge des Äquivalenzprinzips und wurde bereits 1907 von Einstein voausgesagt.

Was heisst **gravitative Rotverschiebung**? Gravitative Rotverschiebung bedeutet, dass wenn sich eine elektromagnetische Welle in einem Gravitationsfeld Richtung kleinerer Gravitationsfeldstärke bewegt, die Welle/Photon an Energie verliert. Auf Grund der Beziehung zwischen Energie und Frequenz ...

$$E = hf$$

E: Energie des Photons
h: Planck'sches Wirkungsquantum (eine Konstante)
f: Frequenz der elektromagnetischen Welle/Photons

sowie der allgemeinen Beziehung zwischen Frequenz und Wellenlänge ...

$$c = \lambda f$$

c: Lichtgeschwindigkeit
f: Frequenz der elektromagnetischen Welle/Photons
λ: Wellenlänge der elektromagnetischen Welle/Photons

hat das Photon eine kleinere Frequenz und auf Grund der Frequenz/Wellenlänge Beziehung eine grössere Wellenlänge.

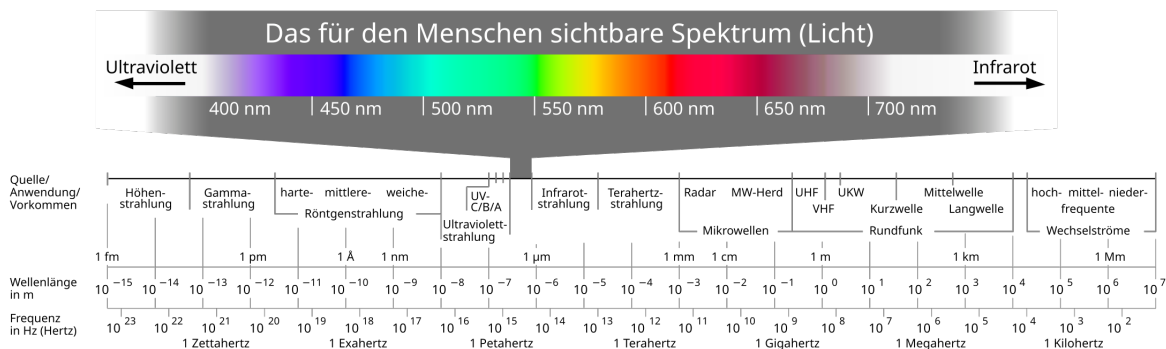


Abbildung: Der für die Menschen sichtbare Bereich des elektromagnetischen Spektrums sowie das ganze elektromagnetische Spektrum. (Link)

Das blaue Licht hat eine Wellenlänge von zirka 450 nm und das rote Licht hat eine Wellenlänge von zirka 630

nm. Von der Mitte des Spektrums aus gesehen (550 nm) bedeutet die **Rotverschiebung** eine Verschiebung zu längeren Wellenlängen und die **Blauverschiebung** eine Verschiebung zu kürzeren Wellenlängen.

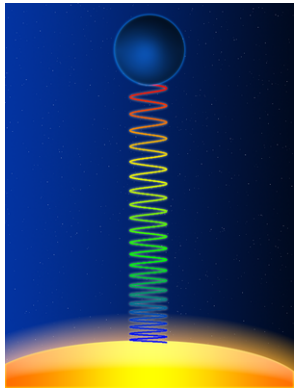


Abbildung Illustration der Rotverschiebung (Link)

Eine quantitative Messung gelang 1959 durch das Pound-Rebka-Experiment. Dort wurde die relative **Rotverschiebung von zwei Quellen, die sich an der Spitze und am Boden des Jefferson Turms der Harvard University befanden**, durch Ausnutzung des Mößbauer-Effekts vermessen. Das Resultat war in ausgezeichneter Übereinstimmung mit der ART und eine der ersten Präzisionsmessungen ihrer Voraussagen. (Link)

Weitere Beobachtungen

Es wurden viele weitere Experimente und Beobachtungen durchgeführt, um die ART zu überprüfen. **Bis heute hat die ART alle Tests bestanden.** Im Folgenden wird nur skizzenhaft auf einige wichtige Experimente eingegangen. Die angegebenen Links führen auf Zusatzinformationen.

Shapiro Verzögerung (von Radiosignalen)

Diese heute so genannte **Shapiro-Verzögerung** (Link) wurde im Jahr 1964 von Irwin Shapiro (Link) theoretisch vorausgesagt und gilt heute als der vierte klassische Test der ART.

Gemäss ART wird die Struktur der Raumzeit in der Nähe von grossen Massen beeinflusst. Für Radar- oder auch Lichtsignale ergibt sich eine Laufzeitverzögerung (d.h. Licht nahe einer grossen Masse bewegt sich aus Sicht eines entfernten Beobachters langsamer als mit Vakuumlichtgeschwindigkeit.).

Im Jahr 1968 wurde dieser Test mit Radarsignalen, die von der Venus und Merkur reflektiert wurden, durchgeführt. Wenn Erde/Sonne/Venus fast auf einer Linie lagen, dann ergab sich eine Zeitverzögerung von 200 μs und bestätigte die ART.

Uhren im Flugzeug und GPS

Interessante Effekte ergeben sich auch, wenn Sie in einem Flugzeug die Erde umrunden.

- In der Höhe ist die Gravitation schwächer. Die Uhren laufen in der Höhe schneller als auf dem Boden auf Grund der ART.
- Das Flugzeug bewegt sich schneller als der Beobachter am Boden. Die Uhren laufen in der Höhe langsamer auf Grund der SRT.

Dies wurde im Jahr 1971 von Hafele und Keating (Link) getestet. Sie nahmen vier Atomuhren und flogen mit ihnen zwei Mal um die Erde. Einmal ostwärts und einmal westwärts.

Der Vergleich der bewegten Uhren mit Uhren, die am Startpunkt zurückgeblieben waren, zeigte eine Übereinstimmung mit der SRT und ART.

Results [\[edit\]](#)

The results were published in *Science* in 1972:^{[5][6]}

	nanoseconds gained, predicted			nanoseconds gained, measured	difference
	gravitational (general relativity)	kinematic (special relativity)	total		
eastward	+144 ±14	-184 ±18	-40 ±23	-59 ±10	0.76 σ
westward	+179 ±18	+96 ±10	+275 ±21	+273 ±7	0.09 σ

Tabelle: Resultate des Hafele-Keating Experiments (Link)

Ein ähnliches Phänomen beobachtet man beim GPS (vgl. Link). Es ergibt sich eine Abweichung zwischen der Uhr auf der Erde und der Uhr auf dem GPS Satellit ...

- Auf Grund der **SRT** (Geschwindigkeit 3874 m/s des Satelliten bezogen auf das Zentrum der Erde) ist die Uhr im Satellit pro Tag um 7'214 ns **langsamer**.
- Auf Grund der **ART** (der Satellit befindet sich auf einer Höhe von 20'184 km über der Erde und deshalb in einem schwächeren Gravitationsfeld) ist die Uhr im Satellit pro Tag um 45'850 ns **schneller**.
- D.h. dass die Uhr im Satellit **pro Tag um 38'640 ns schneller läuft**.

Auf Grund der SRT und ART ergibt sich somit pro Tag eine Abweichung der Uhren von 38 μs. Ohne die Berücksichtigung dieses Effekts würde GPS nicht funktionieren.

Test der ART bei stärkeren Gravitationsfeldern (Binärpulsare)

Die oben beschriebenen Tests wurden im Sonnensystem durchgeführt. Die ART wurde aber auch schon in stärkeren Gravitationsfeldern getestet und verifiziert.

Zum Beispiel bei zwei Pulsaren, die umeinander kreisen (Link)

Gravitationswellen (neue Beobachtungsmethode)

Die Himmelsbeobachtung bot im Laufe der Zeit immer mehr Möglichkeiten ...

- Seit Urzeiten können die Menschen Himmelbeobachtungen ohne Hilfsmittel im sichtbaren Bereich des elektromagnetischen Spektrums durchführen.
- Galileo Galilei hat im Jahr 1609 den Himmel erstmals mit Hilfe der neu entwickelten Teleskope betrachtet und analysiert.
- Mit Hilfe von Sensoren konnten weitere Bereiche der elektromagnetische Strahlung (die ausserhalb des sichtbaren Spektrums lag und die Atmosphäre der Erde durchdringen konnte) . Vgl die Abbildung des e.m. Spektrums oben.
- Mit Hilfe von Ballonen und Satelliten konnte auch jene Strahlung untersucht werden, die in der Atmosphäre absorbiert wird.
- Dann kamen auch noch Teilchendetektoren dazu. Man konnte nun die kosmische Strahlung/Teilchen (Muonen, Protonen, Neutrinos) untersuchen.

Ein ganz neues Kapitel wurde im Jahre 2015 mit der Fertigstellung von **Gravitationswellendetektoren** (Michelson Interferometer) aufgeschlagen. Gravitationswellen (Link), die durch die Erde verlaufen, und die Raumzeit geringfügig verändern, können mit diesen Detektoren vermessen werden. Dabei werden Auslenkungen der Spiegel des Interferometers in der Grössenordnung von weniger als unglaublichen Zehntausendstel des Protodurchmessers (10^{-19} m) gemessen.

Es gibt zur Zeit drei grosse Observatorien ...

- **LIGO** (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) in den USA (Link) mit den Standorten ...
 - Hanford (Washington, USA),
 - Livingston (Louisiana, USA), und
- **Virgo** (benannt nach dem Virgo Galaxienhaufen) in Italien in der Nähe von Pisa (Link).

Damit sich überhaupt (auf der Erde messbare) Gravitationswellen in den Raum ausbreiten und bei uns detektiert werden können, müssen sehr grosse Massen sehr grosse Beschleunigungen erreichen. Dies ist beispielsweise am Ende des Verschmelzens von Schwarzen Löchern oder von Neutronensternen der Fall. Das beobachtbare (End)Spektakel dauert nur wenige Sekunden.

Es wird bei all diesen Beobachtungen wieder eine ausgezeichnete Übereinstimmung mit der ART festgestellt.

Die Gravitationswellen breiten sich mit Lichtgeschwindigkeit aus und können nicht abgeblockt werden. Sie können uns in Bereiche schauen lassen, die für elektromagnetische Strahlung nicht durchdringbar ist. Einstein hat die Gravitationswellen in einer Publikation im Jahre 1916 vorausgesagt. In der Newton'schen Physik kann es keine Gravitationswellen geben, da die Wechselwirkung dort mit unendlicher Geschwindigkeit propagiert.

Graviton

In den Theorien der Quantengravitation ist das **Graviton** ein hypothetisches Elementarteilchen, das die Gravitationswechselwirkung vermittelt, analog ...

- zum **Photon**, das die elektromagnetische Wechselwirkung vermittelt,
- zu den **Gluonen**, die die starke Wechselwirkung vermitteln,
- zum **W und Z Bosonen**, die die schwache Wechselwirkung vermitteln.

Aber mit diesen Ausführungen sind wir schon im Bereich der Teilchenphysik und Quantenfeldtheorie.

Wir können jedoch sagen: **Bislang wurde das Graviton noch nicht beobachtet.**

Weitere Phänomene

Stichwortartig möchte ich zum Abschluss noch einige weitere interessante Phänomene, die einen Bezug zur ART haben, erwähnen ...

- Schwarze Löcher (engl. black holes)
- Wurmlöcher (engl. worm holes)
- Einstein-Rosen Bridge
- Das Standardmodell der Kosmologie (**Λ CDM-Modell**). Es beinhaltet ...
 - die Allgemeine Relativitätstheorie (Robertson-Walker-Metrik)
 - die Dunkle Energie (engl. dark energy, entspricht der kosmologischen Konstanten Λ)
 - die Dunkle Materie (engl. dark matter, CDM: Cold Dark Matter)
 - Urknall (engl. big bang)

und nochmals auf die interessante Zeitleiste "Timeline of gravitational physics and relativity" (Link) mit vielen, vielen Links hinweisen.