Kapitel 04 - Kinematik

Autor: Norbert Marxer

Version: Version 1 (24.03.2025)

Einleitung

Die Kinematik bzw. Bewegungslehre beschäftigt sich mit der Beschreibung von Bewegungen.

- Wenn sich ein Körper im Raum bewegt, kann seine Position bzw. sein Ort (nach Festlegung eines für die Situation geeigneten Koordinatensystems) zum Zeitpunkt t mit Hilfe eines Ortsvektors $\vec{r}[t]$ beschrieben werden. Der Ortsvektor $\vec{r}[t]$ beschreibt somit die Bahn bzw. die Trajektorie des Körpers.
- Zu jedem Zeitpunkt t hat der Körper auch eine zeitabhängige Geschwindigkeit $\vec{v}[t]$.
- Der Geschwindigkeitsvektor (engl. velocity) hat sowohl einen Betrag (Länge) als auch eine Richtung.
- Der Betrag der Geschwindigkeit wird auch mit Schnelligkeit (engl. speed) bezeichnet.
- Wenn eine Beschleunigung parallel zum Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}[t]$ wirkt (Tangentialbeschleunigung $\vec{a}_t[t]$, dann ändert sich nur der Betrag des Geschwindigkeitsvektors.
- Wenn eine Beschleunigung $\vec{a}[t]$ senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor wirkt (Radialbeschleunigung $\vec{a}_r[t]$), dann ändert sich nur die Richtung des Geschwindigkeitsvektors.

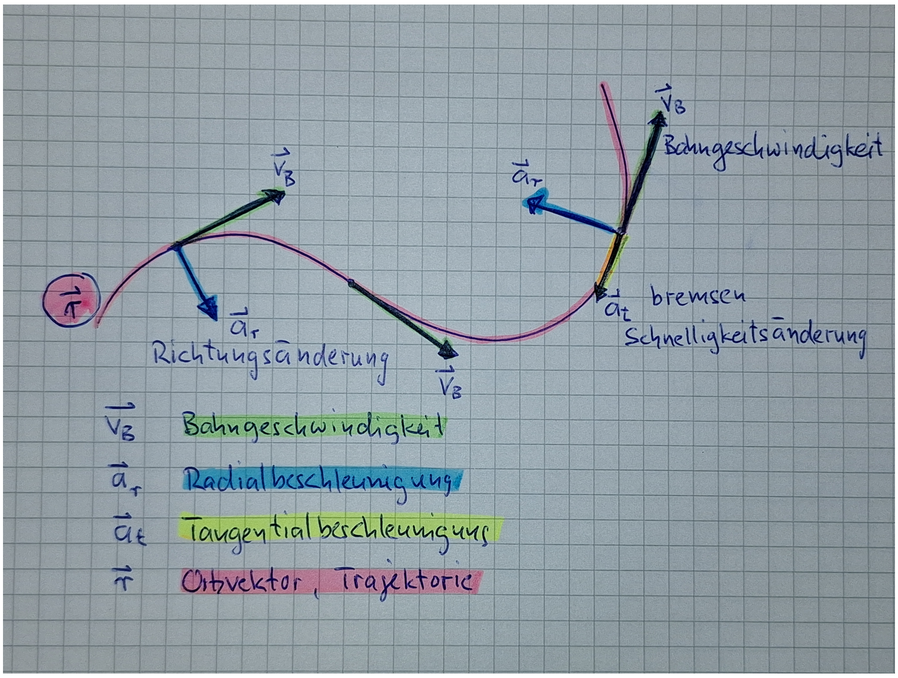


Abbildung Die vektoriellen Grössen $\vec{v}_B[t]$, $\vec{a}_t[t]$, $\vec{a}_r[t]$ der Trajektorie $\vec{r}[t]$.

Wir werden in diesem Kapitel insbesondere Situationen untersuchen, in denen der Betrag der Geschwindigkeit verändert wird.

- Translationen: Bewegungen entlang einer Geraden.
- Rotationen: Bewegung um eine Drehachse und wo uns nur die Tangentialbeschleunigungen interessieren.

Wir werden nur in einem Fall Radialbeschleunigungen antreffen.

- Bei der Bewegung auf einer Kreisbahn.

Die in der Kinematik vorkommenden physikalischen Grössen Ort (bzw. Position), Geschwindigkeit und Beschleunigung sind vektorielle physikalische Grössen: $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$.

- Wir untersuchen hier aber insbesondere Translationen entlang einer Geraden und Rotationen um eine Drehachse.
- Durch geschickte Wahl des Koordinatensystems ...
  - wir legen die *x*-Achse entlang der Geraden,
  - wir legen die *z*-Achse in die Drehachse,

  können die vorkommenden vektoriellen Grössen mit skalaren Grössen beschrieben werden: x, v, und a sowie φ, ω, und α.
- Der Richtungssinn dieser Bewegungen kann mit dem Vorzeichen angegeben werden.
- Im Folgenden wird (wie allgemein üblich in solchen Situationen) nicht von der Schnelligkeit v gesprochen, sondern von der Geschwindigkeit v. Die Richtung ist aber klarerweise entlang der Geraden.
- Siehe dazu auch den Anhang A.

Wichtige physikalische Grössen für **Bewegungen entlang einer Geraden**, wo wir das Koordinatensystem so wählen, dass die Bewegung entlang der *x*-Achse verläuft, sind ...

- die **Zeit t** und das Zeitintervall **Δt**,
- die **Position x** zur Zeit t und die Änderung der Position **Δx** im Zeitintervall Δt,
- die **Geschwindigkeit v** zur Zeit t und die Änderung der **Geschwindigkeit Δv** im Zeitintervall Δt,
- die **Bescheunigung a** zur Zeit t. Die Beschleunigung gibt an, wie schnell sich die Geschwindigkeit ändert.
- Wir unterscheiden ausserdem zwischen **Momentan**geschwindigkeit v und **mittlerer** Geschwindigkeit $\overline{v}$,
- sowie zwischen **Momentan**beschleunigung a und **mittlerer** Beschleunigung $\overline{a}$.
- Diese Gleichungen können auch auf einer kurvigen Strecke verwendet werden, wenn nur die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen parallel zur Momentangeschwindigkeit berücksichtigt werden. Dann wird an Stelle von x häufig die Variable s verwendet. Beispiel: Autofahrt.

Wichtige physikalische Grössen für **Rotationen um eine Drehachse** sind ...

- die **Zeit t** und das Zeitintervall **Δt**,
- der **Winkel φ** zur Zeit t und dessen Änderung **$\Delta\varphi$** im Zeitintervall Δt,
- die **Winkelgeschwindigkeit ω** zur Zeit t und deren Änderung **$\Delta\omega$** im Zeitintervall Δt,
- die **Winkelbeschleunigung α** zur Zeit t.
- Auch hier unterscheiden wir zwischen $\boldsymbol{\omega}$, $\overline{\boldsymbol{\omega}}$ sowie $\boldsymbol{\alpha}$, $\overline{\boldsymbol{\alpha}}$.

Wir unterscheiden dabei sowohl für Translationen als auch für Rotationen zwischen ...

- **gleichförmigen** Bewegungen ($a = 0$ bzw. $\alpha = 0$),
- **gleichmässig beschleunigten** Bewegungen (a = konstant bzw. α = konstant) und
- **unleichmässig beschleunigten** Bewegungen (a ist zeitabhängig bzw. α ist zeitabhängig)

Unterschiedliche **kinematische Gleichungen** für die Zeitabhängigkeit von $x[t]$, $v[t]$ und $a[t]$ resultieren für diese Situationen. Diese Zeitabhängigkeiten können in den entsprechenden Diagrammen anschaulich dargestellt werden. Die Diagramme sind ...

- das **Ort-Zeit-Diagramm** $x[t]$
- das **Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm** $v[t]$ und
- das **Beschleunigung-Zeit-Diagramm** $a[t]$.

Nachdem wir die **kinematischen Gleichungen** hergeleitet und diskutiert haben, verwenden wir diese, um Bewegungen im Gravitationsfeld der Erde zu untersuchen. Die untersuchten Bewegungen sind räumlich begrenzt, so dass die Erdbeschleunigung g als konstant angenommen werden kann.

Die ersten Beispiele (**freier Fall und senkrechter Wurf**) spielen sich entlang einer Geraden ab.

Die anderen Beispiele sind zusammengesetzte Bewegungen, nämlich **waagrechter und schräger Wurf**, und spielen sich in einer Ebene ab.

Diagramme

Die Kinematik kann am einfachsten mit Hilfe von Diagrammen, in denen die zeitabhängigen Funktionen dargestellt werden, erklärt werden.

Bei diesen Diagrammen wird die Zeit t in der horizontalen Achse eingetragen. In der vertikalen Achse steht ...

- der Ort/die Position $x[t]$ beim **Ort-Zeit-Diagramm**,
- die momentane Geschwindigkeit $v[t]$ beim **Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm**,
- die momentane Beschleunigung $a[t]$ beim **Beschleunigung-Zeit-Diagramm**.

Wenn wir eines dieser Diagramme kennen, können die anderen beiden für einfache Fälle durch Bestimmung der Tangentensteigung bzw. der Fläche unter dem Funktionsgraphen bestimmt werden. Wir werden dies in den folgenden Kapiteln für gleichförmige und gleichmässig beschleunigte Bewegung durchführen ...

$$x[t] \xrightarrow{\textbf{Tangentensteigung}} v[t] \xrightarrow{\textbf{Tangentensteigung}} a[t]$$

$$a[t] \xrightarrow{\textbf{Flächenbestimmung}} v[t] = v_0 + \Delta v \xrightarrow{\textbf{Flächenbestimmung}} x[t] = x_0 + \Delta x$$

Bei der Flächenbestimmung erhält man nur die Positionsänderung Δx bzw. die Geschwindigkeitsänderung Δv. Die Anfangsposition x_0 oder die Anfangsgeschwindigkeit v_0 muss gegeben sein.

Im allgemeinen und für schwierigere Situationen können die Diagramme voneinander mit Hilfe der Differentialrechnung oder der Integralrechnung abgeleitet werden (siehe Anhang A) ...

$$x[t] \xrightarrow{\textbf{Differenzieren}} v[t] = \dot{x}[t] \xrightarrow{\textbf{Differenzieren}} a[t] = \dot{v}[t] = \ddot{x}[t]$$

$$a[t] \xrightarrow{\textbf{Integrieren}} v[t] = v_0 + \int_0^t a[\tau]\, d\tau \xrightarrow{\textbf{Integrieren}} x[t] = x_0 + \int_0^t v[\tau]\, d\tau$$

Dabei ist die Geschwindigkeit die Änderungsrate der Position x. Mathematisch ...

$$v[t] = \frac{dx}{dt} = \dot{x}[t]$$

Analog ist die Beschleunigung die Änderungsrate der Geschwindigkeit. Mathematisch ...

$$a[t] = \frac{dv}{dt} = \dot{v}[t]$$

Dies ist im Anhang A erklärt.

Die Notation, bei der die Ableitung nach der Zeit durch einen Punkt ($\frac{dx}{dt} = \dot{x}[t]$) dargestellt wird, geht auf Isaac Newton (1643-1727) zurück.

Translation (Verschiebung) entlang einer Geraden

Gleichförmige Translation

Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm

Bei der **gleichförmigen Translation** ist die Geschwindigkeit zeitlich konstant. Dies ergibt das folgende Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm.

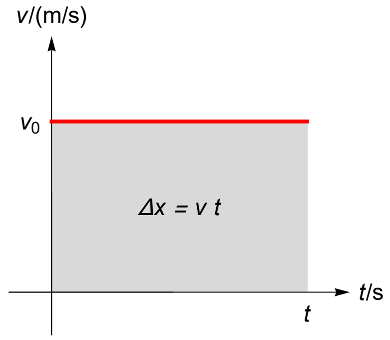


Abbildung Der Körper bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit v.
Die Fläche unter der Kurve entspricht der Ortsänderung Δx.
Die momentane Steigung zur Zeit t entspricht der Beschleunigung $a[t]$,
die hier für alle t gleich 0 ist.

Das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm ist das wichtigste der drei Diagramme. Aus ihm lassen sich sowohl die Beschleunigung als auch die Positionsänderung direkt ableiten.

Beschleunigung-Zeit-Diagramm

Wir sehen im Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm, dass die Steigung bzw. die momentane Beschleunigung zu jedem Zeitpunkt gleich Null ist. Das gleiche gilt dann natürlich auch für die mittlere Steigung in jedem Zeitintervall.

Damit ergibt sich das folgende Beschleunigung-Zeit-Diagramm.

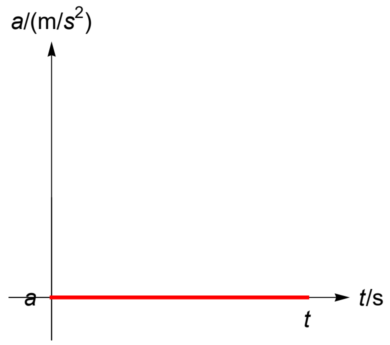


Abbildung Die Beschleunigung ist konstant gleich 0.
Die Fläche unter der $a[t]$ Kurve entspricht der Differenz Δv, die hier gleich 0 ist

Gemäss der Definition hat die Beschleunigung die Einheit $\frac{m/s}{s} = \frac{m}{s^2}$.

Bemerkung

- Die Erdbeschleunigung ist bekanntlich 9.81 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Was muss man sich darunter vorstellen?
- Wir können 9.81 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ auch schreiben als $\frac{9.81\ \mathrm{m/s}}{\mathrm{s}}$.
- Jetzt ist es klar. Die Geschwindigkeit ändert sich um 9.81 m/s pro Sekunde.

Ort-Zeit-Diagramm

Wir kennen alle die Formel aus der Schulzeit, dass sich bei konstanter Geschwindigkeit der in einem Zeitintervall zurückgelegte Weg x folgendermassen berechnet ...

$$x = v * t$$

Wir sehen, dass dies auch der Fläche im obigen Ort-Zeit-Diagramm entspricht. Diese Flächeninterpretation gilt nicht nur für gleichförmige Bewegungen, sondern immer: Die Fläche unter der $v[t]$ Kurve entspricht der Ortsänderung Δx.

Dies ergibt das folgende Ort-Zeit Diagramm (wir starten bei $x = 0$ zur Zeit $t = 0$) ...

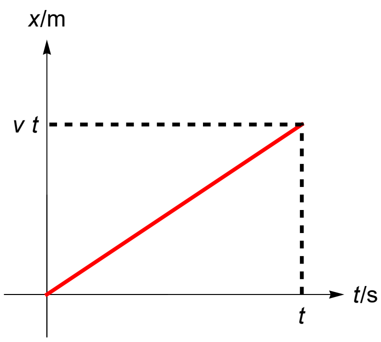


Abbildung Die Position x nimmt gemäss der Gleichung $x = v\,t$ zu.
Die Steigung zur Zeit t entspricht der Geschwindigkeit $v[t]$ zur Zeit t.

Bemerkung

- Das Ort-Zeit-Diagramm bzw. Position-Zeit-Diagramm wird häufig auch Weg-Zeit-Diagramm genannt.
- Dies setzt aber voraus, dass die Geschwindigkeit immer in die gleiche Richtung verläuft.
- Wenn Sie eine Zeitdauer t mit Geschwindigkeit v in eine Richtung fahren und dann gleichlang in die Gegenrichtung mit der gleichen Geschwindigkeit v, sind Sie wieder am gleichen Ort, d.h. die Positionsänderung ist gleich 0. Für die eine Richtung ist Δx positiv und für die andere Richtung negativ (vgl. orientierte Fläche im Anhang A).

  $$\Delta x = v\,t + (-v)\,t = 0$$

- Der zurückgelegte Weg s ist jedoch gleich $s = 2\,v\,t$.

Alle Diagramme

Im Folgenden werden die drei Diagramme übereinander und mit konkreten Zahlenwerten dargestellt. Auf diese Weise können die Methoden ...

- Bestimmung der Fläche: $a[t] \rightarrow v[t] \rightarrow x[t]$
- Bestimmung der Tangentensteigung: $x[t] \rightarrow v[t] \rightarrow a[t]$

nochmals anschaulich dargestellt und kontrolliert werden (z.B. für $t = 40$ s).

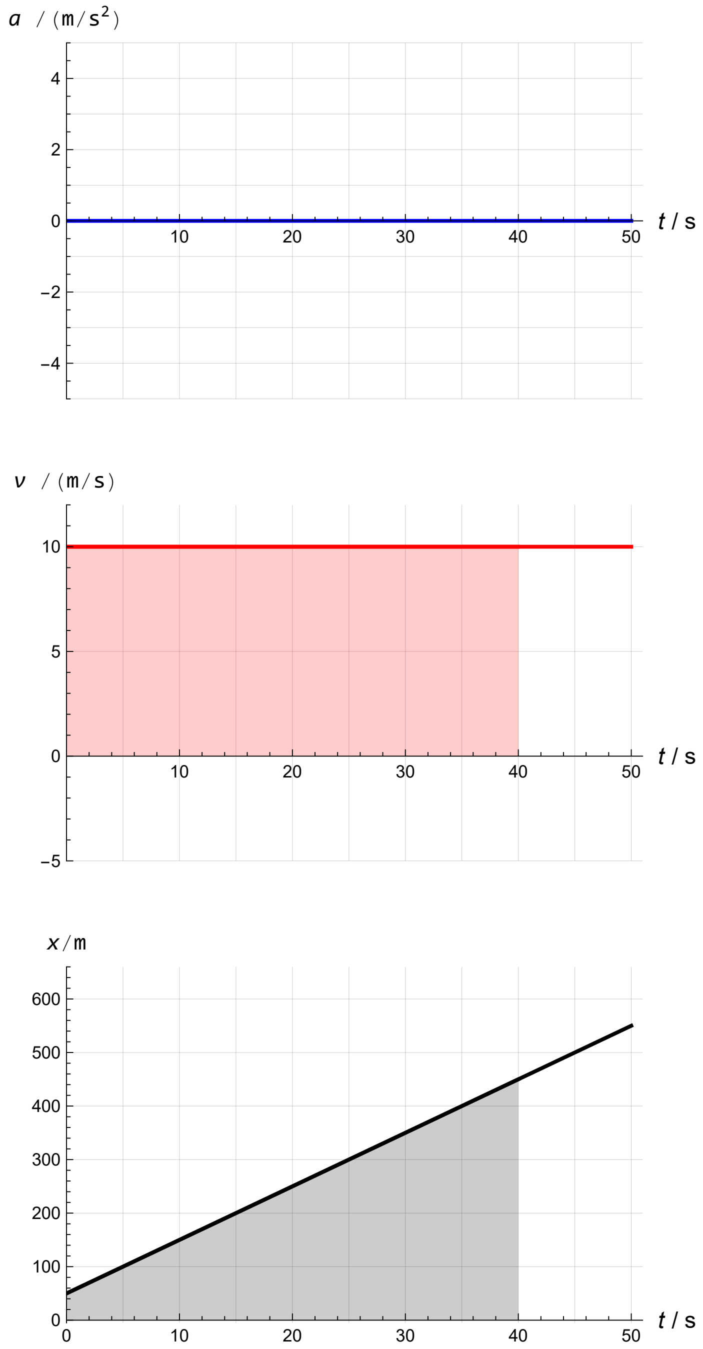


Abbildung Die Diagramme bei der gleichförmigen Bewegung mit: $a = 0\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $v_0 = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $x_0 = 50$ m

Dies illustriert quantitav, wie mittels Steigungsbestimmung bzw. Flächenbestimmung die Diagramme auseinander hervorgehen, und dass zusätzlich zur Flächenbestimmung auch noch die Anfangsposition und die Anfangsgeschwindigkeit (d.h. zwei Integrationskonstanten) gegeben sein müssen. Die Flächen geben nur die Zuwächse (Δv und Δx) an.

Gleichmässig beschleunigte Translation

Beschleunigung-Zeit-Diagramm

Bei der gleichmässig beschleunigten Translation ist die Beschleunigung konstant. Damit ergibt sich das folgende **Beschleunigung-Zeit-Diagramm**.

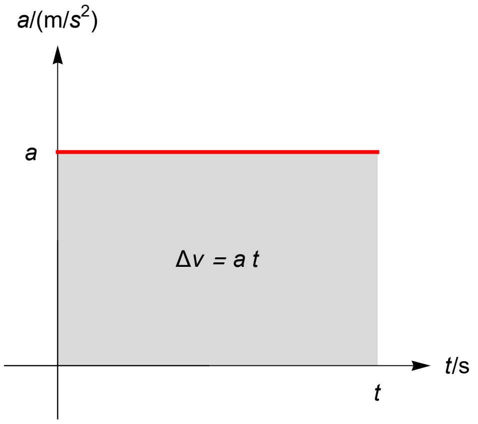


Abbildung Die Beschleunigung ist konstant.
Die Geschwindigkeitsänderung Δv entspricht der Fläche unter der $a[t]$ Kurve.

Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm

Um wieviel ändert sich die Geschwindigkeit bei dieser konstanten Beschleunigung?

Um die Geschwindigkeitsänderung Δv zu berechnen, müssen wir nur die Fläche unter der $a[t]$ Kurve bestimmen. Sie beträgt ...

$$\Delta v = a\, t$$

Dies ist die Geschwindigkeitsänderung. Um den korrekten Wert zu erhalten, müssen wir noch die Anfangsgeschwindigkeit v_0 addieren.

$$v = v_0 + a\, t$$

Je nach Anfangsgeschwindigkeit gibt es ein unterschiedliches Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm. Wir untersuchen hier den (schwierigeren) Fall mit einer Anfangsgeschwindigkeit ungleich 0. Wir erhalten das folgende **Geschwindigkeit-Zeit Diagramm** ...

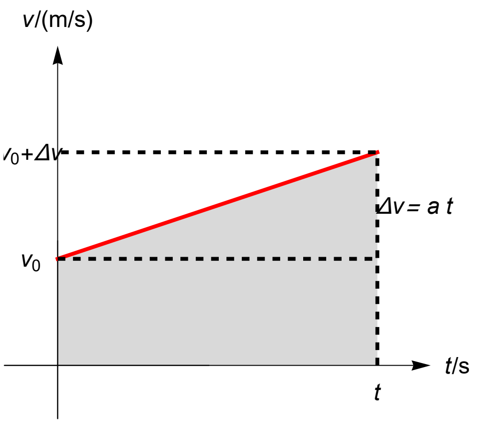


Abbildung Die Geschwindigkeit nimmt linear zu.
Die Fläche unter der $v[t]$ Kurve entspricht der Ortsänderung Δx.
Die momentane Steigung der $v[t]$ Kurve entspricht der momentanen Beschleunigung $a[t]$.

Ort-Zeit-Diagramm

Wir haben nun eine sich mit der Zeit ändernde Geschwindigkeit. Wir wissen jedoch, dass die Ortsänderung Δx der Fläche unter der $v[t]$ Kurve entspricht.

Die Fläche ergibt sich als Summe der Rechtecks- und der Dreiecksfläche. Das heisst ...

- Rechteckfläche ist gleich $v_0\, t$
- Dreiecksfläche ist gleich $\frac{1}{2} * t * (a\, t) = \frac{1}{2}\, a\, t^2$

Dies gibt zusammen ...

- $\Delta x = v_0\, t + \frac{1}{2}\, a\, t^2$
- Wir sehen, dass die Positionsänderung quadratisch zunimmt. Der Funktionsgraph ist somit eine Parabel.
- Die obige Fläche ergibt nur die Positionsänderung. Wir müssen deshalb die Anfangsposition x_0 dazuaddieren. Diese wird jedoch in der Regel gleich 0 gesetzt.

Alternativ können wir die Fläche auch als Trapez auffassen und berechnen ...

- Die Trapezfläche ergibt sich aus der Breite mal dem Mittelwert der beiden Geschwindigkeiten
- Das ergibt die Formel $\Delta x = t\, \frac{v_0 + (v_0 + \Delta v)}{2}$
- Dies ist das gleiche wie oben, denn $\Delta x = t\, \frac{2\, v_0 + a\, t}{2} = v_0\, t + \frac{1}{2}\, a\, t^2$

Damit ergibt sich das folgende **Ort-Zeit-Diagramm**.

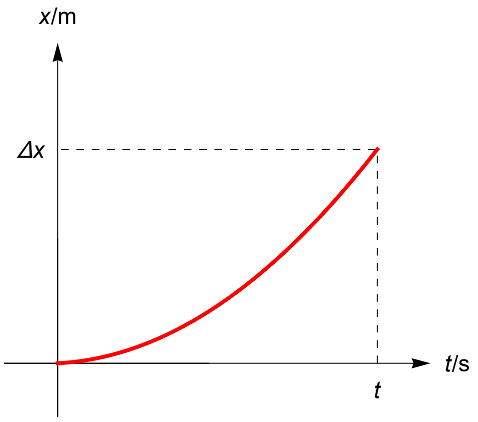


Abbildung Die Positionsänderung Δx nimmt quadratisch zu.
Die momentane Steigung der $x[t]$ Kurve entspricht der momentanen Geschwindigkeit $v[t]$.
Da der Funktionsgraph gekrümmt ist, haben wir eine beschleunigte Bewegung: Die Geschwindigkeit bzw. die Tangentensteigung nimmt mit der Zeit zu.

Alle Diagramme

Im Folgenden werden die drei Diagramme übereinander und mit konkreten Zahlenwerten dargestellt. Auf diese Weise können die Methoden ...

- Bestimmung der Fläche: $a[t]$ → $v[t]$ → $s[t]$
- Bestimmung der Tangentensteigung: $s[t]$ → $v[t]$ → $a[t]$

nochmals anschaulich dargestellt und kontrolliert werden (z.B. für $t = 40$ s).

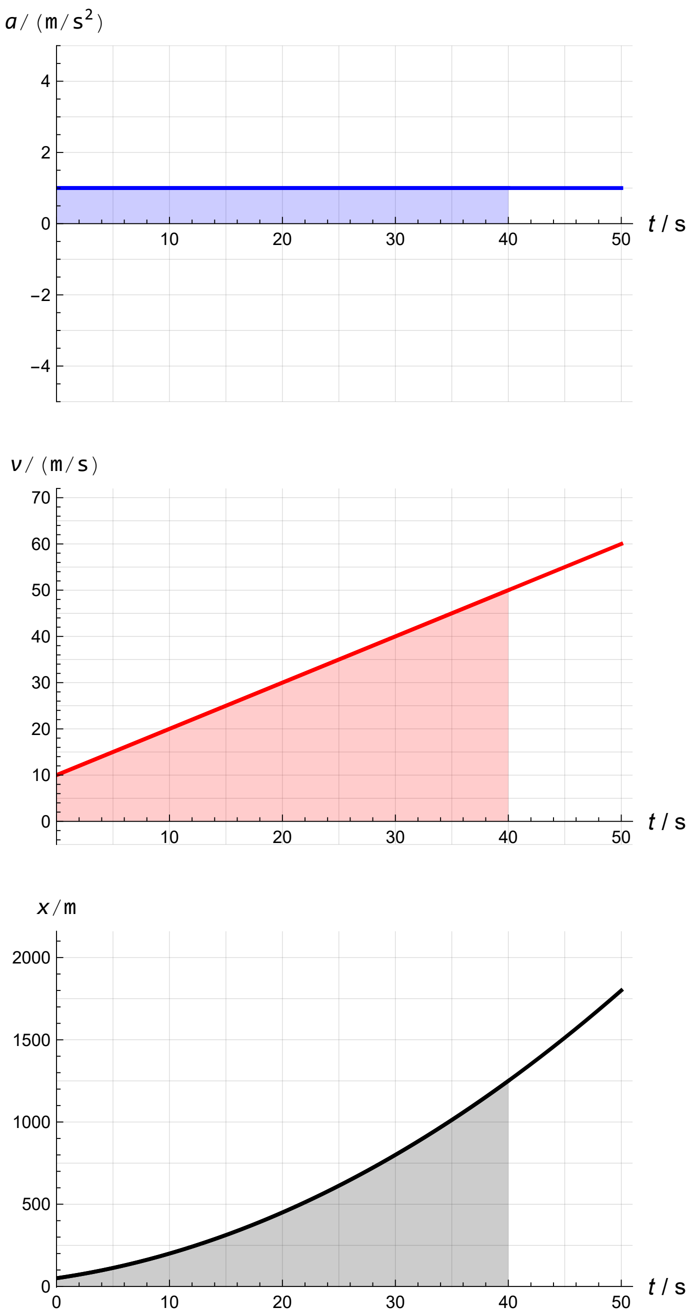


Abbildung Die Diagramme bei der gleichmässig beschleunigten Bewegung mit: $a = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, $v_0 = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und $x_0 = 50\,\mathrm{m}$

Zusammengesetze Diagramme

Wir können auch mehrere Phasen zusammenstückeln. Im folgenden Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm (konkrete Zahlenwerte sind gegeben; damit können die Flächen und Steigungen ausgerechnet und nachgeprüft werden) haben wir ...

- zunächst eine gleichförmige Bewegung,
- dann eine gleichmässig beschleunigte Bewegung,
- dann wieder eine gleichförmige Bewegung und
- am Schluss eine gleichmässige (negative) Beschleunigung bzw. eine Verzögerung.

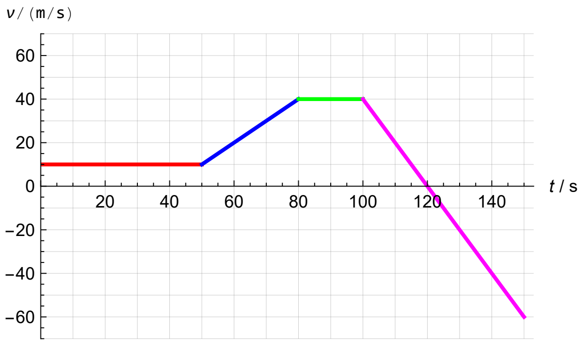


Abbildung Wir starten mit dem **Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm**.

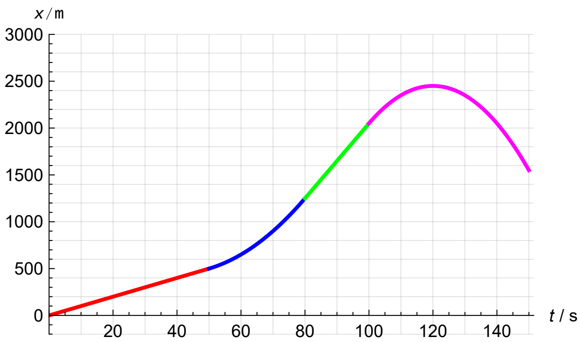


Abbildung Die Flächen (Integrieren) in *v*[*t*] liefern das **Ort-Zeit Diagramm**.

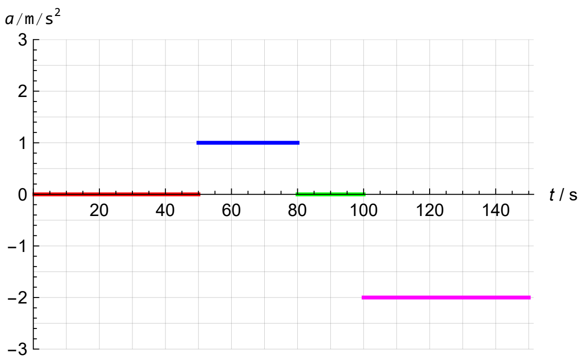
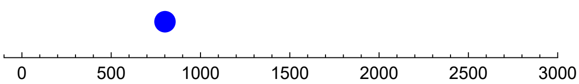


Abbildung Die Tangentensteigungen (Differenzieren) in *v*[*t*] liefern das **Beschleunigung-Zeit-Diagramm**.

Auch wenn die Diagramme krummlinige Kurven haben: die Bewegung findet nur entlang einer Geraden statt. Die folgende Animation zeigt diese Bewegung entlang einer Geraden (nicht in der pdf Datei).



Kinematische Gleichungen der Translation

Wir fassen das bisherige Ergebnis für eine gleichmässig beschleunigte Bewegung (d.h. $a[t]$ ist konstant) mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 und einer Anfangsposition $x_0 = 0$ folgendermassen zusammen ...

(1)	$v = v_0 + a\,t$	Gleichung ohne x
(2)	$x = (x_0) + v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2$	Gleichung ohne v

Die hier vorkommenden Grössen sind ...

t	die Zeit,
x	die Position zur Zeit t, d.h. $x[t]$
v_0	die Geschwindigkeit zur Zeit 0, d.h. $v[0]$
v	die Geschwindigkeit zur Zeit t, d.h. $v[t]$
a	die konstante Beschleunigung a

Wir haben somit 5 physikalische Grössen, die durch 2 Gleichungen miteinander verknüpft sind. Somit müssen 3 Grössen gegeben sein, um die anderen 2 Grössen ausrechnen zu können.

Wir stellen fest, ...

- dass in Gleichung (1) die Position x nicht vorkommt und
- dass in Gleichung (2) die Geschwindigkeit v nicht vorkommt.
- Durch Kombination der obigen Gleichungen können wir auch Gleichungen erhalten, in denen a oder t nicht vorkommt.

Zur Elimination von a gehen wir folgendermassen vor ...

(1)' $\quad a = \frac{v - v_0}{t}$

(1)' in (2) $\quad x = v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2 = v_0\,t + \frac{1}{2}\,\frac{(v-v_0)}{t}\,t^2 = t\left(v_0 + \frac{1}{2}\,(v - v_0)\right) = \frac{v + v_0}{2}\,t$

(3) $\quad x = \frac{v + v_0}{2}\,t \qquad$ Gleichung ohne a

Diese Gleichung kennen wir schon von der Flächenberechnung mittels Trapez ($\frac{v_0 + (v_0 + \Delta v)}{2}\,t$). Dabei entspricht $v_0 + \Delta v$ der Endgeschwindigkeit v.

Zur Elimination von t gehen wir folgendermassen vor ...

(1)' $\quad t = \frac{v - v_0}{a}$

(1)' in (2)

$$x = v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2 = v_0\,\frac{v-v_0}{a} + \frac{1}{2}\,a\left(\frac{v-v_0}{a}\right)^2 = \frac{v\,v_0 - v_0\,v_0}{a} + \frac{1}{2}\,a\,\frac{v^2 - 2\,v\,v_0 + v_0^2}{a^2}$$

$$= \frac{2\,v\,v_0 - 2\,v_0\,v_0}{2\,a} + \frac{v^2 - 2\,v\,v_0 + v_0^2}{2\,a} = \frac{-2\,v_0\,v_0}{2\,a} + \frac{v^2 + v_0^2}{2\,a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2\,a}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2\,a\,x$$

(4) $\quad v = \sqrt{v_0^2 + 2\,a\,x} \qquad$ Gleichung ohne t

Was ist der Vorteil der Gleichungen (3) und (4)? Wieso haben wir sie hergeleitet? Sie bringen ja nichts Neues. Den Vorteil können wir an einem Beispiel illustrieren. Nehmen Sie an, dass Sie den Weg x berechnen müssen und die Werte v_0, v und a seien gegeben.

- Mit den Gleichungen (1) und (2) allein müssten Sie zunächst t mittels (1) ausrechnen und dann dieses t in (2) einsetzen.
- Mit (4) können Sie dies direkt mit der Gleichung (4) erledigen.

Wir können die Gleichungen für gleichmässige beschleunigte Bewegungen auch für gleichförmige Bewegungen verwenden, indem wir $a = 0$ setzen. Es folgt ...

(1)	$v = v_0 + a\,t$	$\xrightarrow{a=0}$	$v = v_0$	(1)
(2)	$x = v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2$	$\xrightarrow{a=0}$	$x = v_0\,t$	(2)
(3)	$x = \frac{v+v_0}{2}\,t$	$\longrightarrow$	$x = \frac{v+v_0}{2}\,t = v_0\,t$	= (2)
(4)	$v = \sqrt{v_0{}^2 + 2\,a\,x}$	$\xrightarrow{a=0}$	$v = \sqrt{v_0{}^2} = v_0$	= (1)

was auf die korrekten zwei unterschiedlichen Gleichungen führt.

Ungleichmässig beschleunigte Translation

Ungleichmässig beschleunigte Translationen sind schwieriger zu berechnen. Das Prinzip bleibt aber das gleiche ...

- Die Fläche unter der $a[t]$ Kurve ergibt die Geschwindigkeitsänderung Δv.
- Die Fläche unter der $v[t]$ Kurve ergibt die Positionsänderung Δx.

Ausserdem gilt ...

- Die Steigung der $v[t]$ Kurve an der Stelle t ergibt die Momentanbeschleunigung: $a[t] = \frac{dv[t]}{dt}$.
- Die Steigung der $x[t]$ Kurve an der Stelle t ergibt die Momentangeschwindigkeit: $v[t] = \frac{dx[t]}{dt}$).

Dies erfolgt mit Hilfe der Differential- und Integralrechnung. Dies haben wir weiter vorne schon diskutiert ...

$$x[t] \xrightarrow{\textbf{Differenzieren}} v[t] = \dot{x}[t] \xrightarrow{\textbf{Differenzieren}} a[t] = \dot{v}[t] = \ddot{x}[t]$$

$$a[t] \xrightarrow{\textbf{Integrieren}} v[t] = v_0 + \int_0^t a[\tau]\,d\tau \xrightarrow{\textbf{Integrieren}} x[t] = x_0 + \int_0^t v[\tau]\,d\tau$$

Rotation (Drehung) um einen Drehpunkt

Einführung der Begriffe

Wir untersuchen in diesem Abschnitt Rotationen von starren Körpern (z.B. einer Scheibe) um eine Drehachse. Wenn sich auf der Scheibe eine Markierung befindet, können wir die Stellung der Scheibe durch den Winkel φ dieser Markierung angeben.

Dieser **Winkel** wird in der Physik in der Regel mit der Einheit Radiant (rad) angegeben.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen gleichförmigen Translationen und Rotationen ist, dass im einen Fall die Bewegung immer in eine Richtung geht, während bei gleichförmigen Rotationen (d.h. konstanter Winkelgeschwindigkeit) nach der sogenannten Periodendauer T der Körper wieder am gleichen Ort ist. Die relevanten Begriffe bei gleichförmigen Rotationen sind ...

- **Winkel** φ
- **Periodendauer** T
  - Nach der Zeit T befindet sich der Körper wieder an der gleichen Stelle.
  - T gibt somit die Zeit pro Umdrehung an.
- **Drehzahl** n
  - Die Drehzahl gibt die Anzahl der Umdrehungen pro Zeit an und hat die SI-Einheit 1/s bzw. Hertz (Hz).
  - Es gilt somit, dass: $T = \frac{1}{n}$
  - Die Drehzahl entspricht auch der Umflauffrequenz f: $n = f$
- **Winkelgeschwindigkeit** ω
  - Die Winkelgeschwindigkeit gibt den überstrichenen Winkel pro Zeit an.
  - Eine Drehzahl von einer Umdrehung pro Sekunde entspricht dabei einer Winkelgeschwindigkeit von 2π pro Sekunde.
  - Dies alles wird zusammengefasst mit: $\omega = 2\pi n = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{T}$

Bei den Translationen hatten wir die physikalischen Grössen Ort x, Geschwindigkeit v und Beschleunigung a.

Bei Rotationen haben wir die Grössen (Dreh)Winkel φ, Winkelgeschwindigkeit ω und **Winkelbeschleunigung** α.

Diese Grössen hängen jeweils auf die gleiche Weise voneinander ab ...

	$v = \dot{x}$	$a = \dot{v}$	bei Translationen
bzw.	$\omega = \dot{\varphi}$	$\alpha = \dot{\omega}$	bei Rotationen

Die Mathematik ist deshalb die gleiche und wir können die folgenden Ersetzungen machen ...

$x \rightarrow \varphi$

$v \rightarrow \omega$

$v_0 \rightarrow \omega_0$

$a \rightarrow \alpha$

t bleibt unverändert.

und erhalten die folgenden Formeln bei gleichmässig beschleunigten Rotationen (und $\varphi_0 = 0$)...

(1)	$\omega = \omega_0 + \alpha t$	Gleichung ohne φ
(2)	$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$	Gleichung ohne ω
(3)	$\varphi = \frac{\omega + \omega_0}{2} t$	Gleichung ohne α
(4)	$\omega = \sqrt{\omega_0{}^2 + 2 \alpha \varphi}$	Gleichung ohne t

Bewegungen auf der Kreisbahn

Bei Rotationen einer Scheibe führt jeder Massenpunkt (ausgenommen derjenige im Drehmittelpunkt) eine Kreisbewegung aus.

Für die Verknüpfung der Bahngrössen s_B (Strecke entlang der Kreisbahn), v_B (Bahngeschwindigkeit) und a_B (Bahnbeschleunigung, Tangentialbeschleunigung) gelten auch die kinematischen Gleichungen der Translation. Diese Bahngrössen sind ausserdem mit den Grössen der Rotation verknüpft ...

$s_B = \varphi r$ Dies folgt aus der Definition des Winkels in Radiant $\varphi = \frac{b}{r}$.

$v_B = \omega r = 2 \pi f r = \pi f d$ d ist der Durchmesser und damit $d = 2 r$.

$a_B = \alpha r$

Das obige folgt aus der Tatsache, dass ...

$$v_B = \frac{d(s_B)}{dt} = \frac{d(\varphi r)}{dt} \overset{\text{da } r = \text{konst}}{=} \frac{d(\varphi)}{dt} r = \omega r$$

und analog für $a_B = \alpha r$.

Wenn sich der Körper nicht geradlinig bewegt, muss eine **Radialbeschleunigung a_r** senkrecht zum momentanen Bahngeschwindigkeitsvektor wirken. Die Radialbeschleunigung a_r ändert nur die Richtung des Geschwindigkeitsvektors des Körpers. Bei der Bewegung auf einer Kreisbahn wirkt die Radialbeschleunigung in Richtung des Kreismittelpunkts gemäss ...

$a_r = \frac{v_B{}^2}{r} = \omega^2 r$ denn $v_B = \omega r$

Optional: Der Beweis dieser Formel erfolgt mit Hilfe der Differentialrechnung in zwei Schritten.

$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \operatorname{Cos}[\omega t] \\ r \operatorname{Sin}[\omega t] \end{pmatrix}$ Ortsvektor für eine Kreisbewegung mit Winkelgeschwindigkeit ω.

$\vec{v_B} = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} -r \omega \operatorname{Sin}[\omega t] \\ r \omega \operatorname{Cos}[\omega t] \end{pmatrix}$ gemäss Ableitungsregeln

$\vec{a_r} = \dot{\vec{v}} = \begin{pmatrix} -r \omega^2 \operatorname{Cos}[\omega t] \\ -r \omega^2 \operatorname{Sin}[\omega t] \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} r \operatorname{Cos}[\omega t] \\ r \operatorname{Sin}[\omega t] \end{pmatrix} = -\omega^2 \vec{r}$ gemäss Ableitungsregeln

Man sieht dass die Radialbeschleunigung $\vec{a}$ in die entgegengesetze Richtung zum Radialvektor $\vec{r}$ zeigt. Für die Beträge/Länge der Vektoren gilt ...

$a = \omega^2 * r$ somit das Gleiche wie oben

Grössen der Rotation als Vektoren

Wir haben gesehen, dass für Kreisbahnen gilt ...

$v_B = \omega r$

Dabei ist ...

v_B die Bahngeschwindigkeit tangential zur Kreisbahn,
ω die Winkelgeschwindigkeit,
r der Abstand des Massenpunktes vom Rotationszentrum.

Wir können obige Gleichung auch vektoriell schreiben ...

$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Dabei zeigt die Winkelgeschwindigkeit in Richtung der Drehachse. Damit stehen der Radiusvektor und der Winkelgeschwindigkeitsvektor senkrecht aufeinander, und der Winkel zwischen den Vektoren ist 0 und die Gleichung für v_B reduziert sich auf die gewünschte Form ...

$$v_B = |\vec{v}_B| = |\vec{\omega}| * |\vec{r}| * \mathrm{Sin}[90°] = \omega * r$$

Die Drehrichtung ergibt sich mit folgenden Methoden ...

- Anwendung der Rechte-Hand-Regel für das Vektorprodukt $\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{r}$.
- Anwendung der Korkenzieherregel. Die Vorwärtsbewegung des (rechtsherum bewegten) Korkenziehers zeigt in Richtung des Winkelgeschwindigkeitsvektors.
- Wenn die Finger der rechten Hand in Richtung der Umfangsgeschwindigkeit zeigen, dann zeigt der Daumen in Richtung des Winkelgeschwindigkeitsvektors.

Krummlinige Bewegungen

Wir haben in den vorherigen Abschnitten die folgenden Situationen betrachtet ...

- Translationen entlang einer Geraden
- Translationen entlang einer krummlinigen Kurve (wenn nur die Tangentialbeschleunigungen und Tangentialgeschwindigkeiten) berücksichtigt werden.
- Rotationen um eine Drehachse
- Kreisbahnen

Schwierigere Situationen haben wir, wenn sich der Körper im 3-dimensionalen Raum bewegt und Beschleunigungen sowohl tangential als auch senkrecht zur Bahnkurve auftreten.

Eine Beschleunigung kann sowohl den Betrag als auch die Richtung des Geschwindigkeitsvektors ändern.

- Bei Änderung nur des Betrages der Geschwindigkeit handelt es sich um eine geradlinig beschleunigte Bewegung.
- Bei Änderung nur der Richtung der Geschwindigkeit liegt eine gleichförmige Bewegung auf einer gekrümmten Bahn vor. Bei konstanter Beschleunigung handelt es sich um eine Kreisbahn.
- Bei Änderung sowohl des Betrages als auch der Richtung der Geschwindigkeit haben wir eine beschleunigte Bewegung auf gekrümmter Bahn. Dazu ist sowohl eine Tangentialbeschleunigung als auch eine Beschleunigung senkrecht zur Bahn notwendig.

Freier Fall und Schräger Wurf

Freier Fall, Senkrechter Wurf nach unten und oben

Wir legen das Koordinatensystem so fest, dass die positive h-Achse nach unten zeigt (h ist die Fallhöhe).

Wir erhalten wegen der (lokal) konstanten Gravitationskraft eine gleichmässig beschleunigte Bewegung (mit $a = g = 9.81\ \text{m}/\text{s}^2$ und Anfangsgeschwindigkeit v_0) mit den kinematischen Gleichungen ...

(1) $h = v_0\, t + \frac{1}{2}\, g\, t^2$

(2) $v = v_0 + g\, t$

(3) $h = \frac{v + v_0}{2}\, t$

(4) $v = \sqrt{v_0^2 + 2\, g\, h}$

Die Anfangsgeschwindigkeit v_0 ist ...

- beim freien Fall gleich 0,
- beim senkrechten Wurf nach oben negativ und
- beim senkrechten Wurf nach unten positiv.

Waagrechter Wurf

Wenn ein Körper waagrecht geworfen wird (mit v_0), haben wir eine Bewegung in einer Ebene. Wir wählen das Koordinatensystem folgendermassen ...

- In der Horizontalen (positive x-Achse nach rechts) haben wir keine Beschleunigung und somit eine gleichförmige Bewegung.
- In der Vertikalen (positive y-Richtung nach oben) haben wir eine wegen der Gravitationskraft gleichmässig beschleunigte Bewegung nach unten.

Diese beiden Bewegungen überlagern sich.

In der Horizontalen gilt: $a_x = 0 \quad v_x = v_0 \quad x = v_0\, t$ (1) $\quad t = \frac{x}{v_0}$ (1)’

In der Vertikalen gilt: $a_y = -g \quad v_y = -g\, t \quad y = y_0 - \frac{1}{2}\, g\, t^2$ (2)

(1)’ in (2) → $\boldsymbol{y} = y_0 - \frac{1}{2}\, g \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = y_0 - \frac{g}{2\, v_0^2}\, \boldsymbol{x^2}$ (3)

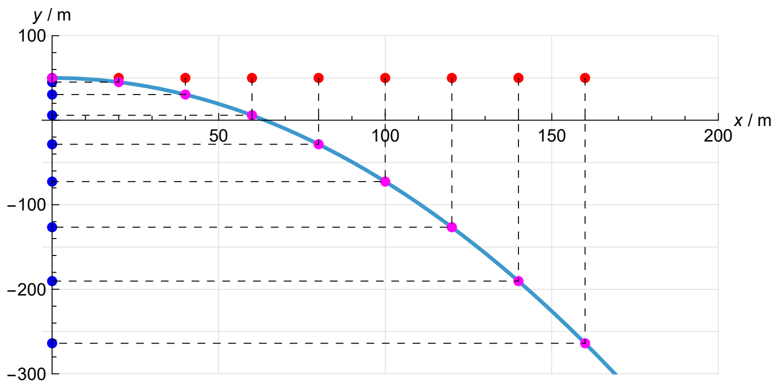


Abbildung Waagrechter Wurf mit $v_0 = 20\ \text{m}/\text{s}$ und einer Abwurfhöhe von $y_0 = 50\ \text{m}$.
Die eingezeichneten Punkte geben die Positionen im Sekundentakt an.

Rot: Die horizontale Bewegung (gleichförmig): $x = v_0\, t$

Blau: Die vertikale Bewegung (freier Fall): $y = y_0 - \frac{1}{2}\, g\, t^2$

Magenta: Die reale (überlagerte) Bewegung: $y = y_0 - \frac{g}{2\, v_0}\, \boldsymbol{x^2}$

Dies ist eine Wurfparabel (quadratische Funktion) mit dem Scheitelpunkt bei $x = 0$.

Schräger Wurf

Beim schrägen Wurf mit dem Abwurfwinkel φ hat die Abwurfgeschwindigkeit sowohl eine Komponente in der Horizontalen als auch in der Vertikalen.

$$v_{0,x} = v_0 \, \mathrm{Cos}[\varphi]$$
$$v_{0,y} = v_0 \, \mathrm{Sin}[\varphi]$$

Diese beiden Bewegungen in der Horizontalen und der Vertikalen überlagern sich. Der Unterschied zum waagrechten Wurf ist, dass wir nun auch eine Anfangsgeschwindigkeit in der Vertikalen haben. Wir wählen die positive y-Richtung nach oben und erhalten.

In der Horizontalen gilt: $a_x = 0 \quad v_x = v_0 \, \mathrm{Cos}[\varphi] \quad x = v_0 \, \mathrm{Cos}[\varphi] \, t$ (1)

In der Vertikalen gilt: $a_y = -g \quad v_y = v_0 \, \mathrm{Sin}[\varphi] - g\, t \quad y = y_0 + v_0 \, \mathrm{Sin}[\varphi] \, t - \frac{1}{2} g \, t^2$ (2)

Aus der Gleichung (1) erhalten wir (1)’: $t = \frac{x}{v_0 \, \mathrm{Cos}[\varphi]}$

Durch Eliminieren von t, d.h. durch Einsetzen von (1)’ in (2) erhalten wir ...

$$y = y_0 + v_0 \, \mathrm{Sin}[\varphi] \left(\frac{x}{v_0 \, \mathrm{Cos}[\varphi]} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \, \mathrm{Cos}[\varphi]} \right)^2$$

$$y = y_0 + \frac{v_0 \, \mathrm{Sin}[\varphi]}{v_0 \, \mathrm{Cos}[\varphi]} x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{(v_0)^2 \, (\mathrm{Cos}[\varphi])^2}$$

(3) $$\boxed{y = y_0 + \mathrm{Tan}[\varphi] \, x - \frac{g}{2 \, v_0^2 \, \mathrm{Cos}[\varphi]^2} x^2}$$

Wir haben beim schrägen Wurf zwei quadratische Funktionen für die Höhe y. Einmal die Abhängigkeit der Höhe $y[t]$ von der Zeit t und einmal die Abhängigkeit der Höhe $y[x]$ von der Weite x.

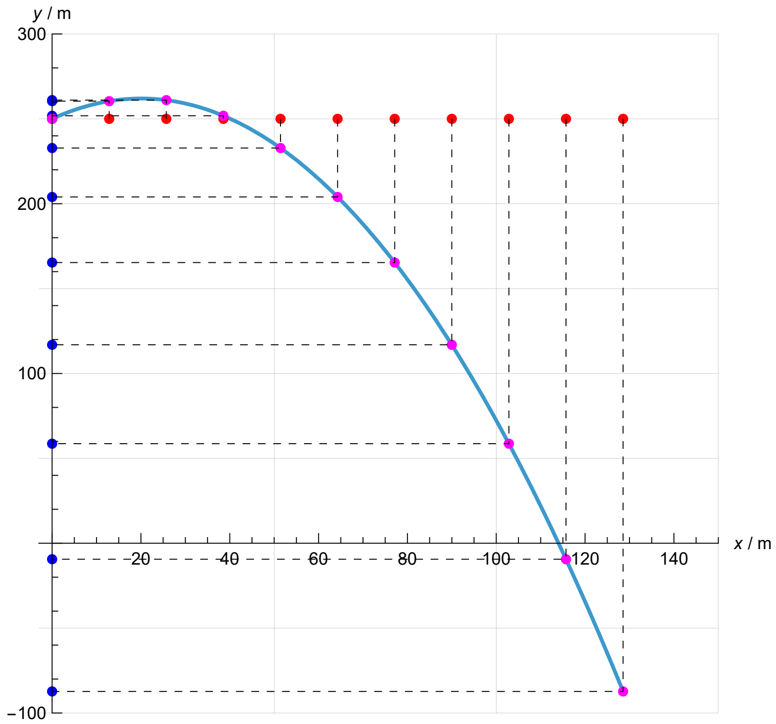


Abbildung Schräger Wurf: Die Höhe in Abbhängigkeit von der Weite: $y[x]$
Abwurfhöhe 250 m, Abwurfgeschwindigkeit 20 m / s und Abwurfwinkel 50 °.
Die eingezeichneten Punkte geben die Positionen im Sekundentakt an.
Rot: Die horizontale Bewegung (gleichförmig).
Blau: Die vertikale Bewegung (freier Fall).
Magenta: Die reale (überlagerte) Bewegung.

Durch Einsetzen von $\varphi = 0$ in Gleichung (3)erhalten wir die Gleichungen des waagrechten Wurfs.

Die **Steigzeit** t_{max}, d.h. die Zeit, bis der Körper die maximale Höhe erreicht hat, ergibt sich folgendermassen ...

An der maximalen Höhe gilt $v_y = 0$

$$\rightarrow \quad v_y = v_0 \operatorname{Sin}[\varphi] - g\,t = 0$$

$$\rightarrow \quad t_{ymax} = \frac{v_0 \operatorname{Sin}[\varphi]}{g} \qquad (4)$$

Die **maximale Wurfhöhe** (Steighöhe) folgt durch Einsetzen von Gleichung (4) in Gleichung (2) ...

$$y_{max} = y_0 + v_0 \operatorname{Sin}[\varphi] \frac{v_0 \operatorname{Sin}[\varphi]}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \operatorname{Sin}[\varphi]}{g}\right)^2$$

$$\rightarrow \quad y_{max} = y_0 + \frac{v_0^2 \operatorname{Sin}[\varphi]^2}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \operatorname{Sin}[\varphi]^2}{g}$$

$$\rightarrow \quad y_{max} = y_0 + \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \operatorname{Sin}[\varphi]^2}{g}$$

Die **maximale Wurfweite** (der Körper erreicht wieder die Anfangshöhe) folgt (aus Symmetriegründen; wir haben eine symmetrische Parabel) durch Einsetzen von $2\,t_{ymax}$ aus Gleichung (4) in Gleichung (1) ...

$$x_{max} = v_0 \operatorname{Cos}[\varphi]\; 2\,t_{ymax} = v_0 \operatorname{Cos}[\varphi] \frac{2\,v_0 \operatorname{Sin}[\varphi]}{g} = \frac{v_0^2}{g}\, 2 \operatorname{Cos}[\varphi] * \operatorname{Sin}[\varphi]$$

Daraus erhalten wir mit Hilfe von $\operatorname{Sin}[2\,\alpha] = 2 \operatorname{Sin}[\alpha] * \operatorname{Cos}[\alpha]$
aus der Physik Merkhilfe die einfache Gleichung ...

$$x_{max} = \frac{v_0^2}{g} * \operatorname{Sin}[2\,\varphi] \qquad (5)$$

Wann wird die **Wurfweite maximal**? Wenn $\operatorname{Sin}[2\,\varphi] = 1$, d.h. $2\varphi = 90°$, d.h. $\varphi = 45°$.

Spezielle Abwurfwinkel sind ...

- 45 ° Hier wird die Wurfweite maximal.
- 0° Wir erhalten die Gleichungen des waagrechten Wurfs.
- 90 ° Wir erhalten die Gleichungen des senkrechten Wurfs.

Wie gross ist die **Bahngeschwindigkeit** v_B dieses Körpers?

Dazu müssen wir den Betrag v des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}$ ausrechnen ...

$$\overrightarrow{v_B} = \begin{pmatrix} v_0 \operatorname{Cos}[\varphi] \\ v_0 \operatorname{Sin}[\varphi] - g\,t \end{pmatrix}$$

$$v_B = \sqrt{(v_0 \operatorname{Cos}[\varphi])^2 + (v_0 \operatorname{Sin}[\varphi] - g\,t)^2}$$

verwenden: eine binomische Grundformel

$$= \sqrt{v_0^2 \operatorname{Cos}[\varphi]^2 + v_0^2 \operatorname{Sin}[\varphi]^2 - 2\,v_0 \operatorname{Sin}[\varphi]\,g\,t + g^2\,t^2}$$

$$= \sqrt{v_0^2 (\operatorname{Cos}[\varphi]^2 + \operatorname{Sin}[\varphi]^2) - 2\,g \left(v_0 \operatorname{Sin}[\varphi]\,t + \frac{g\,t^2}{2}\right)}$$

mit: $\operatorname{Cos}[\varphi]^2 + \operatorname{Sin}[\varphi]^2 = 1$ und $y \overset{(2)}{=} v_0 \operatorname{Sin}[\varphi]\,t + \frac{g\,t^2}{2}$

$$v_B = \sqrt{v_0^2 - 2\,g\,y}$$

Wir können damit die Bahngeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Höhe y angeben.

Anhang

Anhang A Mathematische Begriffe

Absolute Zeit und Zeitintervall

Wenn wir von Zeit sprechen, können wir zwei unterschiedliche Bedeutungen meinen.

- Absolute Zeit
- Zeitdauer

Die **absolute Zeit** *t* wird in Bezug auf einen Zeitnullpunkt (Link) angegeben. Dieser Zeitnullpunkt kann beispielsweise sein ...

- Big Bang der vor zirka 13.8 Milliarden Jahren stattfand
- Christi Geburt Jahr 2025 bedeutet 2025 n.u.Z. (nach unserer Zeitrechnung)
  n.Chr. (nach Christi Geburt), CE (common era)
  v.u.Z., v.Chr., BCE (before common era)
  oder das Vorzeichen gibt an, ob es vor oder nach unserer Zeitrechnung ist
  Andere Religionen können unterschiedliche Zeitnullpunkte haben.
- Mitternacht Start der Uhrzeit
- 1.1.1970, 0 Uhr UTC Die Unixzeit startet an diesem Zeitpunkt. Unix ist ein Computer Betriebssystem.

und wichtig für uns hier ...

- Start eines Experiments.

Die **Zeitdauer** bzw. das **Zeitintervall** Δt gibt den zeitlichen Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ereignissen an. Beispielsweise ...

- Zeitdauer vom 1. Januar 2025 bis zum 1. Juli 2025
- Zeitdauer für ein Experiment

In der Kinematik kommen beide Begriffe vor, wobei häufig nicht sauber zwischen diesen beiden Begriffen unterschieden wird.

Differenzenquotient → Sekantensteigung

Wenn für eine Funktion f zwei Argumente x_0 und x_1 und die dazugehörigen Funktionswerte $f[x_0]$ bzw. $f[x_1]$ gegeben sind, dann lässt sich aus diesen vier Grössen der sogenannte Differenzenquotient berechnen ...

Der Quotient $\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$ heisst **Differenzenquotient** von f für die beiden Stellen x_0 und x_1.

Der Differenzenquotient ist (wie der Name andeutet) ein Quotient von Differenzen: im Nenner steht die Differenz von zwei x-Werten $(x_1 - x_0)$, im Zähler steht die Differenz zwischen den zwei dazugehörigen Funktionswerten $(f[x_1] - f[x_0])$.

Wenn man für den Abstand der beiden x-Werte die Abkürzung $\Delta x = x_1 - x_0$ sowie für die Differenz der beiden Funktionswerte die Kurzschreibweise $\Delta f = f[x_1] - f[x_0]$ verwendet, dann kann man für den Differenzenquotienten auch schreiben ...

$$\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} = \frac{f[x_0+\Delta x]-f[x_0]}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

In der folgenden Graphik werden die verschiedenen Symbole anschaulich dargestellt ...

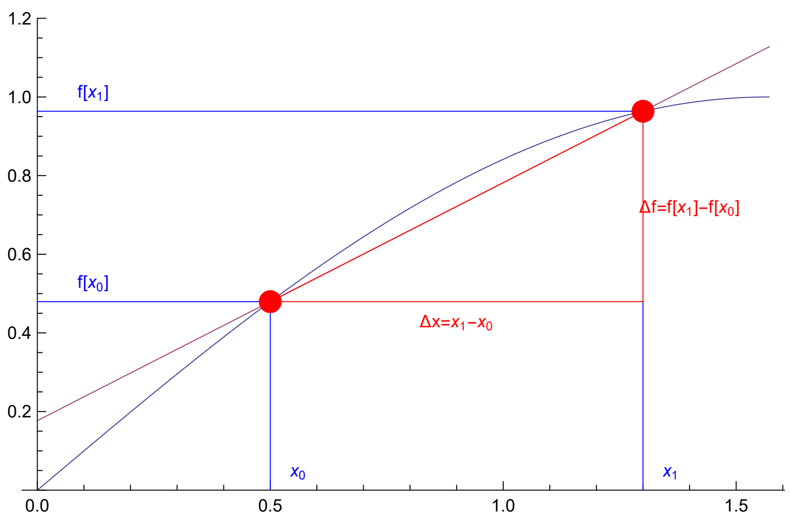


Abbildung Darstellung des Differenzenquotienten mit den Punkten $\{x_0, f[x_0]\}$ und $\{x_1, f[x_1]\}$.

Generell stellt die Gerade durch die beiden Punkte $\{x_0, f[x_0]\}$ und $\{x_1, f[x_1]\}$ die **Sekante** (lateinisch: Schneidende), und der **Differenzenquotient** die Steigung dieser Sekante dar.

Der Funktionswert $f[t]$ kann jedoch auch die Ortskoordinate zu einer bestimmten Zeit t beschreiben. Dann stellt dieser Differenzenquotient die **mittlere Geschwindigkeit** im Zeitintervall $[t_0, t_1]$ dar.

Differentialquotient → Tangentensteigung

Im Rahmen der Differentialrechnung interessiert man sich nun dafür, was passiert, wenn die Stelle x_1 immer näher zur Stelle x_0 wandert. Was passiert dann mit Δf und insbesondere mit dem Differenzenquotienten $\frac{\Delta f}{\Delta x}$?

Wenn Δx gegen 0 geht, wird auch Δf gegen 0 gehen: bei $\Delta x = 0$ ist der Differenzenquotient nicht definiert, denn es gilt: $\frac{f[x_0+\Delta x]-f[x_0]}{\Delta x} \overset{\Delta x=0}{=} \frac{f[x_0]-f[x_0]}{0} = \frac{0}{0}$.

Wir müssen deshalb den Grenzprozess $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f[x_0+\Delta x]-f[x_0]}{\Delta x}$ untersuchen ...

- lim — wird mit "limes" (lateinisch Grenze) ausgesprochen.
- $\lim_{\Delta x \to 0}$ — bedeutet den Grenzprozess, wenn Δx gegen 0 geht (Notation: $\Delta x \to 0$).

Dabei werden sowohl der Wert im Zähler als auch der Wert im Nenner immer kleiner: der Quotient strebt dabei in der Regel aber einem endlichen Wert zu, der Tangentensteigung an der Stelle x_0.

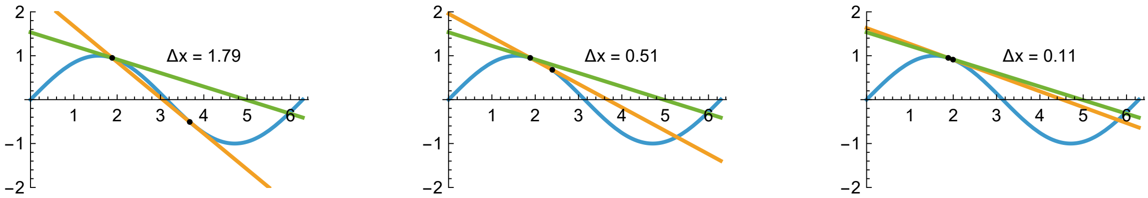


Abbildung Das Intervall wird kleiner und die Sekantensteigung (braun) nähert sich der Tangentensteigung (grün).

Der Ausdruck $\frac{f[x_0+\Delta x]-f[x_0]}{\Delta x}$ nimmt als Grenzwert den Wert der Tangentensteigung ein. Die Tangente ist jene Gerade, die die Kurve an der Stelle x_0 berührt (oder bei der die beiden Schnittpunkte der Sekante in einen Berührpunkt zusammenfallen).

Mathematisch wird dieser Grenzprozess zur Bestimmung der **momentanen Änderungsrate $f'[x_0]$** an der Stelle x_0 so ausgedrückt ...

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f[x_0+\Delta x]-f[x_0]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx}[x_0] = f'[x_0]$$

- Der Grenzwert $f'[x_0]$ heisst **Differentialquotient** von f an der Stelle x_0 oder auch **Ableitung** von f an der Stelle x_0.
- Wenn für alle möglichen x_0 diese Tangentensteigung berechnet wird, resultiert die sogenannte **Ableitungsfunktion** und wird mit f' oder $\dot{f}$ bezeichnet.
- Die Schreibweise mit f' ist die Bezeichnung, die Leibniz (1646 - 1716) eingeführt hat. Sie wird vor allem in der Mathematik verwendet.
- Bei zeitlichen Änderungsraten (wie in der Kinematik) wird vor allem die Schreibweise mit $\dot{f}$, die Newton (1643 - 1727) eingeführt hat, verwendet.
- Wir haben somit zwei Verfahren um die momentane Änderungsrate an einer bestimmten Stelle x_0 zu bestimmen ...
  - rechnerisch über die Grenzwertbildung mit Hilfe des Differentialquotienten,
  - geometrisch durch Bestimmung der Tangentensteigung.
- Es gibt zum Glück schnellere Verfahren und zwar mit Hilfe der (bekannten bzw. tabellierten) Ableitungsfunktionen für elementare Funktionen (wie x^2, Sinus, Logarithmus ...) und einigen Differentiationsregeln (wie Summenregel, Produktregel, ...). Einfache Beispiele für Ableitungen sind ...
  - $\frac{d}{dx}(x) = 1$ $\quad$ $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$
  - $\frac{d}{dx}(\text{Sin}[x]) = \text{Cos}[x]$ $\quad$ $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

Mit Hilfe der Ableitung hat man nun eine einfache Methode, um anzugeben, wie stark (bzw. um wieviel) sich ein Funktionswert an einer bestimmten Stelle ändert, wenn das Argument um einen infinitesimalen Betrag dx verändert wird.

Integral → Flächenbestimmung

Mit Hilfe des Differenzierens kann aus einer Funktion $f[x]$ die momentane Änderungsrate $f'[x]$ bestimmt werden.

Kann auch umgekehrt aus der Funktion $f'[x]$ die Funktion $f[x]$ bestimmt werden? Die Antwort ist: “Ja, mit Hilfe der Integralrechnung (bis auf eine Konstante)”.

Die **Integralrechnung** beruht auch auf einem Grenzprozess zur Bestimmung der Fläche unter einer Kurve. Dieser Grenzprozess kann folgendermassen veranschaulicht werden.

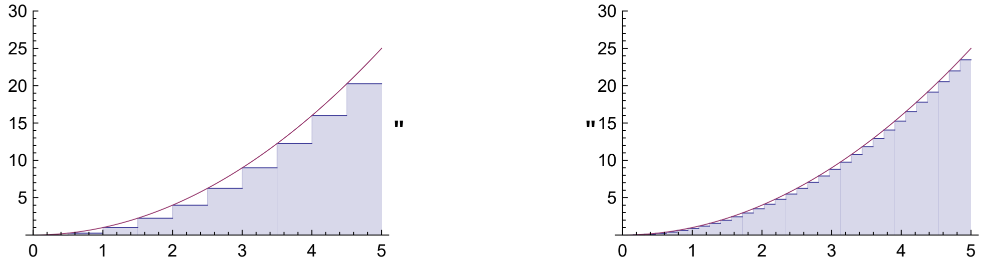


Abbildung Approximation der Funktion $f'[x] = x^2$ im Intervall [0, 5] durch 10 bzw. 32 Rechtecke.

Wir sehen, dass durch den Grenzprozess (wir machen die Breite der Rechtecke immer kleiner) die Fläche unter der Kurve f immer besser angenähert wird. Bei 10 Rechtecken gilt ...

$$A_{10} = \sum_{k=1}^{10} f'[x_k] * \Delta x = \sum_{k=1}^{10} f'[x_k] * \frac{5}{10}$$

- 5 ist die Breite des gesamten Intervalls [0, 5],
- 10 ist die Anzahl der Rechtecke,
- Δx ist die Breite der vertikalen Rechtecke,
- $f'[x_k]$ ist für jedes Rechteck der Funktionswert von $f'[x]$ am linken Rand .

Da $f'[x_k]$ auch negativ sein kann, kann auch die “Fläche” negativ sein. Man spricht deshalb besser nicht von “Fläche”, sondern von “Orientierter Fläche”.

Wenn die Anzahl der Rechtecke gegen Unendlich geht, wird die wahre Fläche immer mehr angenähert. Die genaue Fläche A ist somit gegeben durch den folgenden Grenzprozess ...

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f'[x_k] * \Delta x$$

Die übliche Notation für diesen Grenzwert ist ...

$$A = \int_a^b f'[x]\, dx$$

- a und b sind die untere bzw. obere Grenze des Intervalls,
- $f'[x]$ ist die zu integrierende Funktion und wird Integrand genannt,
- dx zeigt an, dass über die Variable x integriert wird (x ist die sogenannte Integrationsvariable).

Aus dem obigen Summenzeichen Σ (griechisch S) wird das Integralzeichen ∫ (ähnlich zum S), und aus der endlichen Breite Δx wird die infinitesimal kleine Breite dx.

Glücklicherweise muss dieser Grenzprozess nicht immer durchgeführt werden. Es gibt (Integrations)Regeln, mit deren Hilfe die Fläche A schnell bestimmt werden kann.

Zusammenhang Differenzieren / Integrieren

Der **Hauptsatz der Analysis** sagt nun vereinfacht, dass diese Fläche (unter f') bestimmt werden kann, indem die Stammfunktion von f' (d.h. f) verwendet wird und die Funktionswerte dieser Stammfunktion f an den beiden Rändern des Integrationsbereichs ausgewertet werden.

$$A = f[b] - f[a]$$

Allgemein: Die **Stammfunktion** einer Funktion ist diejenige Funktion, die abgeleitet die ursprüngliche Funktion ergibt ...

$$f \xrightarrow{\text{Stammfunktion}} F \qquad \text{mit } F' = f$$

$$f' \xrightarrow{\text{Stammfunktion}} f$$

Diese Fläche A bestimmt die Änderung der Funktion f' im Intervall $[a, b]$. Um die korrekte Funktion angeben zu können, muss noch der Funktionswert (sie sogenannte Integrationskonstante) am unteren Rand a gegeben sein.

Wir können zusammenfassen ...

- Differenzieren von f d.h. $\frac{d}{dx} f[x]$ liefert f'
- Integrieren von f' d.h. $\int f'[x]\, dx$ liefert f (bis auf die Integrationskonstante)

Das Integrieren ist somit das Umgekehrte des Differenzierens.

Lineare Funktionen

Die lineare Funktion ist eine der einfachsten Funktionen, kommt jedoch in der Physik sehr häufig vor. Die übliche Darstellung der linearen Funktion ist ...

$$f[x] = a\,x + b$$

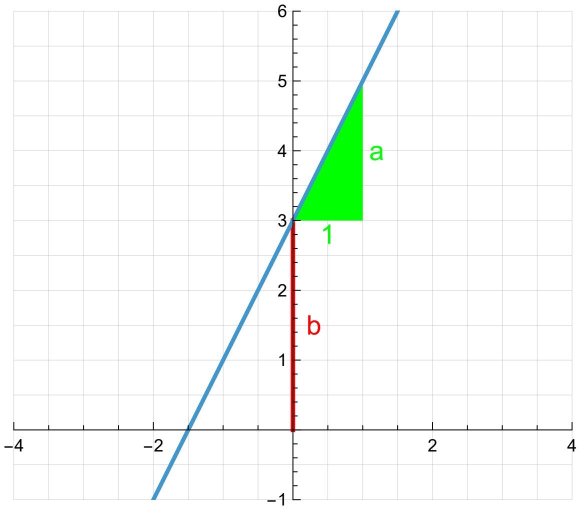


Abbildung Die lineare Funktion $f[x] = 2\,x + 3$

Wir können aus obiger Abbildung herauslesen ...

- Blau: Der Funktionsgraph ist eine Gerade.
- Rot: b ist die Die Stelle (bzw. der y-Wert), an der der Funktionsgraph die y-Achse schneidet.
- Grün: a ist gleich der Steigung der Funktion (überall). Siehe Steigungsdreieck.

Wenn $b = 0$ ist, dann verläuft der Funktionsgraph durch den Koordinatenursprung, und y ist proportional zu x (d.h. y / x ist konstant).

Quadratische Funktionen

Die quadratische Funktion ist auch eine wichtige Funktion in der Physik.

Die übliche Darstellung der quadratischen Funktion ist ...

$$f[x] = a\,x^2 + b\,x + c$$

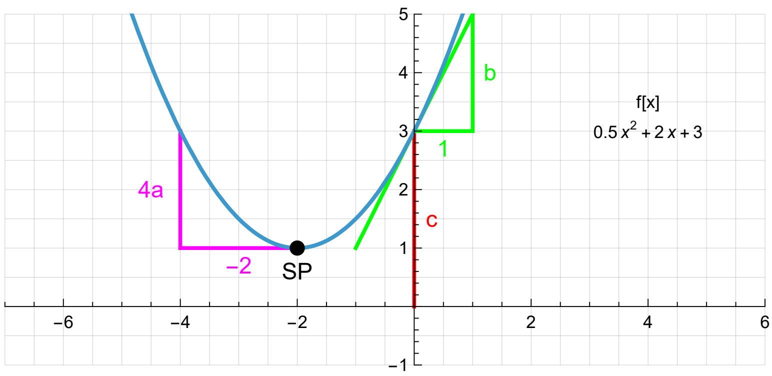


Abbildung Die quadratische Funktion $f[x] = 0.5\,x^2 + 2\,x + 3$

Wir können aus obiger Abbildung herauslesen ...

- Blau: Der Funktionsgraph ist eine Parabel.
- Black: Der Scheitelpunkt SP hat die Koordinaten $\left\{\frac{-b}{2\,a}, c - \frac{b^2}{4\,a}\right\} = \{-2, 1\}$
- Rot: c ist die Die Stelle (bzw. der y-Wert), an der der Funktionsgraph die y-Achse schneidet.
- Grün: b ist gleich der Steigung der Funktion an der Stelle $x = 0$.
- Magenta: a ist ein Mass für die Krümmung im Scheitelpunkt SP:
  Seien $\{x_S, y_S\}$ die Koordinaten des Scheitelpunkts. Dann hat die Funktion den Wert $y_S + a$ an den Stellen $x_S - 1$ und $x_S + 1$ und den Wert $y_S + 4\,a$ an den Stellen $x_S - 2$ und $x_S + 2$ ...

Wenn $b = 0$ ist, dann ist $f[x]$ spiegelsymmetrisch zur y-Achse.

Anhang B Experimente

Experimente zur Kinematik ...

- Gleichförmige Bewegung
  - Kugel rollt auf einem Tisch
- Gleichmässig beschleunigte Bewegung
  - Kugel rollt auf einer geneigten Ebene
  - Freier Fall
  - Senkrechter Wurf
- Überlagerung von Geschwindigkeiten
  - Waagrechter Wurf
  - Schräger Wurf

Anhang C Geschwindigkeiten in Natur und Technik

Es gilt ...

- Die Geschwindigkeit $\vec{v}$ hat die Einheit $\frac{\text{m}}{\text{s}}$: $[\vec{v}] = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}$
- Die minimale Geschwindigkeit (besser Schnelligkeit) ist 0.
- Die **maximale Geschwindigkeit** (besser Schnelligkeit) ist die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum: $c = 299\,792\,458\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

In der Natur und Technik vorkommende, typische Grössen sind in der folgenden Tabelle aufgeführt.

Grösse / (m/s)	andere Einheit	Objekt
0		Körper in Ruhe
$5 * 10^{-9}$		Wachstumsgeschwindigkeit des menschlichen Kopfhaares
$8 * 10^{-4}$		Schneckentempo
$4 * 10^{-3}$		Elektronen in metallischen Leitern
$5.14 * 10^{-1}$	1.852 km/h	Knoten (Seemeile/h)
1.4	5 km/h	Fussgänger
$3.4 * 10^{2}$	1200 km/h	Schall in Luft
$8 * 10^{2}$		Patrone beim Gewehrschuss
$5 * 10^{3}$		Schall in Metall
$3 * 10^{4}$		Erde um die Sonne
$8.5 * 10^{5}$		Schneller Sonnenwind
$3 * 10^{8}$		Lichtgeschwindigkeit im Vakuum

Quellen: Kuchling (2022), Wikipedia

Anhang D Beschleunigungen in Natur und Technik

Es gilt ...

- Die Beschleunigung a hat die Einheit: $[a] = \frac{m}{s^2}$
- Die minimale Beschleunigung ist 0.
- Es gibt **keine maximale Beschleunigung**.

In der Natur und Technik vorkommende, typische Grössen sind in der folgenden Tabelle aufgeführt.

Grösse / (m/s^2)	Objekt
1.67	Fallbeschleunigung auf dem Mond
9.81	Fallbeschleunigung auf der Erde
$8 * 10^1$	Maximalwerte bei Kunstflugmanövern
$1.8 * 10^3$	Höchstwert, bei dem ein Mensch überlebt hat
$5 * 10^3$	Geschoss im Gewehrlauf
$5 * 10^4$	Maximalbeschleunigung des Tennisballs beim Aufschlag
$2 * 10^{11}$	Fallbeschleunigung an der Oberfläche eines Neutronensterns
$1 * 10^{15}$	Elektron in einer Vakuumröhre

Quellen: Kuchling (2022), Wikipedia

Anhang E Quellen

Einige interessante Aspekte zur Kinematik können auf Wikipedia gefunden werden. Die entsprechenden Links sind im Text integriert.

Hilfreich sind auch die Ausführungen im Kuchling und in den beiden Merkhilfen zur Physik bzw. Mathematik. Um sich schnellstmöglich ein Bild zu machen, wo die für das Kapitel “Kinematik” relevanten Themen im **Kuchling** und in den beiden **Merkhilfen** gefunden werden können, ist in diesem Anhang eine detaillierte Auflistung gegeben.

H. Kuchling, “Taschenbuch der Physik”, 2022 (22. Auflage), 714 Seiten

Der für das Kapitel “Kinematik” relevante Abschnitt ist das Kapitel 6 .

N. Marxer, “Physik Merkhilfe”, 2019, 55 Seiten

Auf den folgenden Seiten können die relevanten Inhalte zum Kapitel “Kinematik” gefunden werden ...

Physik Merkhilfe ...

Anhang Mathematik für die Physik

N. Marxer, “Mathematik Merkhilfe” , 2019, 32 Seiten

Auf den folgenden Seiten können die relevanten Inhalte zum Kapitel “Kinematik” gefunden werden ...

Seite 3	Winkel, Winkelfunktionen ...
Seite 4	Vektoren
Seite 4	Kartesische und Polarkoordinaten