

Physik Merkhilfe

NMa / 24.3.2025

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	1
Physikalische Grössen und Einheiten	3
Basisgrössenarten und Basiseinheiten	3
Messfehler	3
SI Vorsätze für dezimale Vielfache und Teile	4
Kraft und Drehmoment	4
Kräfte (Mechanik)	4
Kräfte beim starren Körper	5
Drehmoment	5
Gleichgewicht	5
Kinematik	6
Translationsbewegungen: t, s, v, a	6
Kinematische Gleichungen der Translation mit konstanter Beschleunigung	6
Schräger Wurf	7
Kinematische Gleichungen der Rotation mit konstanter Beschleunigung	7
Kreisbahn	7
Dynamik	8
Newton'sche Axiome	8
Kräfte und Arbeit	8
Impuls	8
Gerade zentrale Stösse	9
Trägheitsmoment, Drehimpuls	9
Analogie Translation und Rotation	10
Gravitation	11
Ruhende Flüssigkeiten	12
Druck	12
Kompressibilität	12
Auftrieb	12
Luftdruck der Atmosphäre	12
Strömungen	12
Reibungsfreie Strömung (inkompressibel)	12
Laminare Strömung	13
Turbulente Strömung	13
Molekularkräfte	13
Oberflächenspannung	13
Kapillarität	14
Elastizität fester Körper	14
Proportionalitätsgrenze, Fließgrenze, Zerreissgrenze	14
Kraft auf einen Stab	14
Allseitiger Druck auf einen Körper	15
Scherung eines Körpers	15
Drillung eines Körpers	15
Mechanische Schwingungen	16
Freie Ungedämpfte Schwingung (ω_0)	16
Freie Gedämpfte Schwingung (ω_d)	17
Allgemeine und spezielle Lösungen	17
Erzwungene Gedämpfte Schwingung (ω)	18
Beispiele harmonischer Schwingungen	19

Mechanische Wellen	20
Ausbreitung	20
Reflexion, Brechung	20
Energie im Wellenfeld	21
Superposition (Interferenz)	22
Superposition	22
Schwingungen gleicher Richtung und Frequenz	22
Schwingungen gleicher Richtung, gleicher Amplitude und ungleicher Frequenz	22
Schwingungen ungleicher Richtung, ungleicher Amplitude und gleicher Frequenz	23
Schwingungen ungleicher Richtung, ungleicher Amplitude und ungleicher Frequenz	23
Zwei gegeneinander laufende Wellen	23
Übergang zwischen zwei Medien (Dielektrika)	23
Akustik	24
Schwingende Saite	24
Schwingende Luftsäule	24
Schallgeschwindigkeit in Gasen	24
Dopplereffekt	24
Schallfeldgrößen (siehe auch Wellen)	24
Schallpegel	25
Lautstärkepegel	25
Optik	26
Licht als Strahl (Geometrische Optik)	26
Licht als Welle (Wellenoptik)	27
Lichtstrahlung	28
Licht als Teilchen	29
Thermodynamik	30
Temperatur, Normbedingungen	30
Ausdehnung durch Temperaturerhöhung	30
Temperaturerhöhung durch Wärmezufuhr	31
Aggregatzustandsänderung durch Wärmezufuhr	32
Energieformen	32
Luftfeuchtigkeit	33
Zustandsgleichung des Idealen Gases	33
1. Hauptsatz der Thermodynamik	34
Kreisprozesse und Entropie	35
Van-der-Waals'sche Zustandsgleichung	35
Kinetische Wärmetheorie	35
Wärmeleitung und Wärmedurchgang	37
Wärmestrahlung	38
Elektrizitätslehre	39
Stromkreis	39
Elektrisches Feld	40
Magnetfeld	42
Übersicht zu Größen des elektrischen und magnetischen Feldes	44
Anhang	46
Griechisches Alphabet	46
Multiplikation mit 1	46
Physikalische Größen und ihre Einheiten	46
Mechanik	46
Akustik	47
Optik	47
Wärmelehre	48
Elektrizitätslehre	48
Magnetismus	49
Mathematik für die Physik	50

Physikalische Grössen und Einheiten

Basisgrössen und Basiseinheiten

Im SI System gibt es 7 Basisgrössen und dazugehörige Basiseinheiten.

Basisgrössen	Dimensionszeichen	Formelzeichen	Basiseinheit	Einheitenzeichen
Länge	L	l, s, r, d	Meter	m
Zeit	T, (Z)	t	Sekunde	s
Masse	M	m	Kilogramm	kg
el.Stromstärke	I	I	Ampere	A
absolute Temperatur	Θ , (T)	T	Kelvin	K
Stoffmenge	N	n	Mol	mol
Lichtstärke	J, (I _L)	I_V	Candela	cd

Alle weiteren physikalischen **Grössen** lassen sich als Potenzprodukte dieser 7 Basisgrössen schreiben.

Alle weiteren **Einheiten** lassen sich als Potenzprodukte dieser 7 Basiseinheiten ohne Zahlenfaktor (→ **abgeleitete SI Einheiten**) bzw. mit Zahlenfaktor (→ **Nicht SI Einheiten**) schreiben.

Die SI-Basiseinheiten waren bis am 20. Mai 2019 folgendermassen definiert (Kuchling) ...

- Ein **Meter** ist der Weg, den das Licht im Vakuum innerhalb von $\frac{1}{299\,792\,458}$ Sekunde (exakt) durchläuft.
- Eine **Sekunde** ist definiert als die Dauer von 9 192 631 770 Perioden der Strahlung des Atoms Caesium 133, die dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus im Grundzustand entspricht.
- Ein **Kilogramm** ist definiert als die Masse des internationalen Kilogrammprototyps, eines in Paris aufbewahrten Zylinders aus Platin-Iridium von 39 mm Höhe und 39 mm Durchmesser.
- Ein **Ampere** ist die Stärke eines elektrischen Stromes, der durch zwei geradlinige parallele Leiter mit einem Abstand von einem Meter fliesst und der zwischen den Leitern je Meter Länge eine Kraft von $2 \cdot 10^{-7}$ N hervorruft.
- Ein **Kelvin** ist der 273.16 te Teil der Temperatur des Tripelpunktes von reinem Wasser.
- Ein **Mol** ist die Stoffmenge, in der ebenso viele Teilchen enthalten sind wie Atome in 12 g des Kohlenstoffisotops C-12. Die Stoffmenge 1 mol enthält demnach bei allen Stoffen gleich viele, nämlich $6.02214 \cdot 10^{23}$ Teilchen.
- Eine **Candela** ist die Lichtstärke einer Strahlungsquelle, die in einer bestimmten Richtung monochromatisches Licht der Frequenz 540 THz (d.h. Vakuumwellenlänge 555 nm) mit der Strahlstärke $\frac{1}{683}$ $\frac{\text{Watt}}{\text{Steradian}}$ aussendet.

Seit dem 20. Mai 2019 sind Kilogramm, Ampere, Kelvin und Mol mithilfe von Naturkonstanten definiert.

Messfehler

Bei wiederholter Messung unter gleichen Bedingungen ...

- tritt ein systematischer Fehler in gleichbleibender Grösse und mit gleichem Vorzeichen auf.
- wird ein zufälliger Fehler um einen Mittelwert streuen (→ die Abweichungen sind unterschiedlich gross und können positiv oder negativ sein).

Statistische Grössen

Mittelwert \bar{x}

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Standardabweichung der Einzelmessung s_x

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Bei Normalverteilung der Fehler gilt:

innerhalb von $\bar{x} \pm s_x$ liegen

zirka 68.3 %,

innerhalb von $\bar{x} \pm 2 s_x$

zirka 95.4 %,

innerhalb von $\bar{x} \pm 3 s_x$

zirka 99.73 % der Messungen.

Standardabweichung des Mittelwerts $s_{\bar{x}}$

$$s_{\bar{x}} = \frac{t}{\sqrt{n}} s_x$$

t ist ein von der Anzahl Messungen (n) und der gewünschten statistischen Sicherheit abhängiger Zahlenfaktor (Student t Verteilung).

Das Ergebnis wird in folgender Form angegeben (68.3% Sicherheit) ...

mit absolutem Fehler:

$$x = \bar{x} \pm s_x$$

mit relativem Fehler:

$$x = \bar{x} (1 \pm s_x / \bar{x})$$

mit prozentualem Fehler:

$$x = \bar{x} (1 \pm s_x / \bar{x} * 100 \times \%)$$

Fehler sind folgendermassen zu runden (Kuchling Seite 613): Ist beim Fehler - von links nach rechts gelesen - die erste Ziffer nach der Null ...

- eine 1 oder 2, dann ist die nächste Stelle die Rundungsstelle

$$s_x = 0.02 \underline{8} 4 \rightarrow s_x = 0.029$$

- eine 3 bis 9, dann ist sie die Rundungsstelle

$$s_x = 0.0 \underline{3} 58 \rightarrow s_x = 0.04$$

und es wird aufgerundet.

Die Ergebniszahl (gleiche Einheit vorausgesetzt) wird auf die gleiche Stelle wie der Messfehler gemäss den gewohnten Regeln gerundet, d.h. ...

- abrunden, wenn die nächste Stelle eine 0 bis 4 ist

$$\rightarrow 15.3754 \pm 0.0284 \rightarrow 15.375 \pm 0.029$$

- aufrunden, wenn die nächste Stelle eine 5 bis 9 ist.

$$\rightarrow 15.3758 \pm 0.0284 \rightarrow 15.376 \pm 0.029$$

SI Vorsätze für dezimale Vielfache und Teile

Für grosse und kleine physikalische Grössen können Zehnerpotenzen oder Vorsätze verwendet werden.

Deka	Hekto	Kilo	Mega	Giga	Tera	Peta	Exa	Zetta	Yotta
da	h	k	M	G	T	P	E	Z	Y
10^1	10^2	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	10^{24}

Dezi	Zenti	Milli	Mikro	Nano	Piko	Femto	Atto	Zepto	Yocto
d	c	m	μ	n	p	f	a	z	y
10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}	10^{-21}	10^{-24}

Kraft und Drehmoment

Kräfte (Mechanik)

Kräfte sind vektorielle Grössen. Beispiele von Kräften in der Mechanik sind (nur Beträge angegeben).

- Gewichtskraft $F_G = m g$ mit der Erdbeschleunigung (an der Erdoberfläche) $g \approx 9.81 \frac{m}{s^2}$

- Gravitationskraft $F_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ mit der Gravitationskonstanten $G = 6.67428 * 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$

- Federkraft $F = k x$ mit der Federkonstanten k (oder auch D)

- Reibungskraft $F_R = \mu F_N$ mit der Reibunszahl μ (speziell: μ_{HR} , μ_{GR} , μ_{RR})

- Auftriebskraft $F_A = \rho_{Fl} V_{FK} g$ mit der Dichte ρ_{Fl} des Fluids und dem Volumen V_{FK} des Festkörpers

- Zentripetalkraft $F_Z = \frac{m v^2}{r} = m \omega^2 r$ Kraft zum Kreismittelpunkt bei einer Kreisbewegung

Kräfte beim starren Körper

Beim starren Körper können die Angriffspunkte der Kräfte entlang der Wirkungslinie verschoben werden, ohne dass ihre Wirkung auf die Translation und Rotation (des starren Körpers) verändert würde.

Man unterscheidet bei der Kräfteaddition am starren Körper ...

- Kräfte mit gleichem Angriffspunkt (parallel, antiparallel, unterschiedliche Richtung)
- Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten (parallel, antiparallel, unterschiedliche Richtung)

Drehmoment

Drehmoment um einen Stützpunkt S (Drehpunkt, Bezugspunkt)

Wenn eine Kraft \vec{F} am Punkt P angreift, so verursacht sie bezüglich des Punktes S ein Drehmoment \vec{M} , das sich wie folgt berechnen lässt ...

$$\vec{M} = (\vec{P} - \vec{S}) \times \vec{F} = \boxed{\vec{r} \times \vec{F}} \quad \text{mit } \vec{r} = \vec{P} - \vec{S} \text{ und } \times \text{ ist das Vektorprodukt}$$

Drehmoment um eine Drehachse (3D)

Für einen Körper, der um eine Drehachse gedreht werden kann, ergibt sich - wenn eine Kraft \vec{F} am Punkt P angreift - für das Drehmoment um die Drehachse ...

$$\vec{M} = (\vec{P} - \vec{S}) \times \vec{F} = \boxed{\vec{r} \times \vec{F}} \quad \text{wobei } \vec{S} \text{ ein beliebiger Punkt der Drehachse ist.}$$

Drehmoment um eine Drehachse (2D)

Das Koordinatensystem sei so gewählt, dass die x -Achse nach rechts, die y -Achse nach oben und die z -Achse aus der Zeichenebene heraus zeigt (rechtshändiges Koordinatensystem).

Wenn die Kraft und der Angriffspunkt in der xy -Ebene verlaufen, gilt ...

$$M_z = M = \|\vec{M}\| = \|\vec{r} \times \vec{F}\| = \boxed{s \cdot F}$$

Der Hebelarm s ist gleich dem Abstand zwischen Drehachse und Wirkungslinie der Kraft.

Rechte-Hand-Regel für Vektorprodukt bzw. Korkenzieherregel ergibt für M :

$M > 0$ aus Zeichenebene heraus, linksdrehend, absoluter Winkel φ zunehmend

$M < 0$ in die Zeichenebene hinein, rechtsdrehend, absoluter Winkel φ abnehmend

Gleichgewicht

Ein Körper ist im **Gleichgewicht**, wenn sowohl die Summe aller angreifenden Kräfte als auch die Summe aller angreifenden Drehmomente gleich null ist.

$$\boxed{\vec{F}_{\text{res}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0}}$$

Kräftegleichgewicht

$$\boxed{\vec{M}_{\text{res}} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{0}}$$

Drehmomentgleichgewicht

Gleichgewichtslagen

Wir unterscheiden die drei Gleichgewichtslagen stabil, labil und indifferent.

Translationsbewegungen: t, s, v, a

Wenn

$s[t], x[t], y[t], \dots$	die Position (Ortskoordinate) zur Zeit t (Ort-Zeit Diagramm)
$v[t]$	die Momentangeschwindigkeit zur Zeit t (Geschwindigkeit-Zeit Diagramm)
$a[t]$	die Momentanbeschleunigung zur Zeit t (Beschleunigung-Zeit Diagramm)

beschreiben, dann gilt für die **Sekantensteigungen** $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ und $\frac{\Delta v}{\Delta t}$...

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \bar{v} \quad \text{mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall } [t_1, t_2],$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \bar{a} \quad \text{mittlere Beschleunigung im Zeitintervall } [t_1, t_2]$$

wobei: $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = s[t_2] - s[t_1]$$

$$\Delta v = v_2 - v_1 = v[t_2] - v[t_1]$$

die Dauer des betrachteten Zeitintervalls

die Positionsänderung in diesem Zeitintervall

die Geschwindigkeitsänderung in diesem Zeitintervall

sowie für die **Tangentensteigungen** $s' = \frac{ds}{dt}$ und $v' = \frac{dv}{dt}$...

$$s'[t_1] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{ds}{dt}[t_1] = v[t_1] \quad \text{Momentangeschwindigkeit } v \text{ zur Zeit } t_1$$

$$s''[t_1] = v'[t_1] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{dv}{dt}[t_1] = a[t_1] \quad \text{Momentanbeschleunigung } a \text{ zur Zeit } t_1$$

$$s'''[t_1] = a'[t_1] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta a}{\Delta t} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{a_2 - a_1}{t_2 - t_1} = \frac{da}{dt}[t_1] \quad \text{Momentane Änderungsrate von } a \text{ zur Zeit } t_1$$

Die Integralrechnung gibt uns die folgenden Beziehungen ...

$$s_2 = s_1 + \int_{t_1}^{t_2} v[t] dt \quad \int_{t_1}^{t_2} v[t] dt = \Delta s = \text{Positionsänderung in } [t_1, t_2] = \text{Fläche unter der } v[t] \text{ Kurve}$$

$$v_2 = v_1 + \int_{t_1}^{t_2} a[t] dt \quad \int_{t_1}^{t_2} a[t] dt = \Delta v = \text{Geschwindigkeitsänderung im Zeitintervall } [t_1, t_2]$$

= Fläche unter der $a[t]$ Kurve

$$\int_{t_1}^{t_2} s[t] dt = \bar{s} \Delta t \quad \bar{s} \text{ entspricht der durchschnittlichen Position.}$$

Kinematische Gleichungen bei Translation mit konstanter Beschleunigung

Für eine **konstante** Beschleunigung $a[t] = a$ im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ können die Integrale berechnet werden ...

allgemein: $\Delta t = t_2 - t_1$

üblich: $t_1 = 0, t_2 = t, \Delta t = t, \Delta s = s, v_1 = v_0, v_2 = v$

$$v_2 = v_1 + a \Delta t$$

$$s_2 = s_1 + v_1 \Delta t + \frac{1}{2} a \Delta t^2$$

$$\rightarrow s_2 = s_1 + \frac{v_1 + v_2}{2} \Delta t$$

$$\rightarrow v_2^2 = v_1^2 + 2 a (s_2 - s_1)$$

$$(1) \quad v = v_0 + a t \text{ oder } \Delta v = a t \quad \text{ohne } s$$

$$(2) \quad s = (s_0) + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \text{ohne } v$$

$$(3) \quad \rightarrow s = \frac{v_0 + v}{2} t \quad \text{ohne } a$$

$$(4) \quad \rightarrow v^2 = v_0^2 + 2 a s \quad \text{ohne } t$$

- s bzw. Δs gibt die Positionsänderung an. Vielfach wird s auch als zurückgelegter Weg bezeichnet. Der zurückgelegte Weg (gemäss km-Zähler) und die Positionsänderung (gemäss GPS) stimmen jedoch nur dann überein, wenn die Geschwindigkeit immer das gleiche Vorzeichen hat (die Bewegung also immer in die gleiche Richtung erfolgt).
- $\frac{v_0 + v}{2}$ ist (bei konstanter Beschleunigung) die **mittlere** Geschwindigkeit im betrachteten Zeitintervall. Die Geschwindigkeit nimmt bei konstanter Beschleunigung linear zu.
- Die Wahl des **Koordinatensystems** (positive Richtung der Achse) bestimmt das Vorzeichen für s, v und a .

Schräger Wurf

Kinematische Gleichungen des schrägen Wurfs (mit $x = 0$ für $t = 0$) ...

horizontal (1) $a_x = 0 \frac{m}{s^2}$

vertikal (4) $a_y = -g$

(2) $v_x = v_0 \cos[\alpha]$

(5) $v_y = v_0 \sin[\alpha] - g t$ $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

(3) $x = v_0 \cos[\alpha] t$

(6) $y = y_0 + v_0 \sin[\alpha] t - \frac{1}{2} g t^2$

(3), (6) →

$$y = y_0 + \tan[\alpha] x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2[\alpha]} x^2$$

Wurfparabel, Bahngleichung

Kinematische Gleichungen bei Rotationen mit konstanter Bahnbeschleunigung

Für Rotationen um eine Drehachse (die senkrecht auf der xy -Ebene steht) wird die Position auf einer Kreisbahn durch den Winkel φ beschrieben. Der Winkel wird im Gegenuhrzeigersinn von der x -Achse aus gemessen.

Es ergeben sich für die kinematischen Gleichungen der Rotation die gleichen Beziehungen wie bei der Translation, wenn die folgenden Ersetzungen durchgeführt werden ...

Position (bzw. Weg) s in m → Winkel (bzw. Drehwinkel) φ in rad

Geschwindigkeit v in $\frac{m}{s}$ → Winkelgeschwindigkeit ω in $\frac{rad}{s}$

Beschleunigung a in $\frac{m}{s^2}$ → Winkelbeschleunigung α in $\frac{rad}{s^2}$

$v = s'$ und $a = v' = s''$ → $\omega = \varphi'$ und $\alpha = \omega' = \varphi''$

(1) $\omega = \omega_0 + \alpha t$

(2) $\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$

(3) $\varphi = \frac{\omega_0 + \omega}{2} t$

(4) $\omega^2 = \omega_0^2 + 2 \alpha \varphi$

Kinematische Gleichungen bei der Rotation

Wichtige Größen bei Rotationen sind auch ...

T $[T] = s$ Periodendauer, Umlaufdauer, Zeit für eine Umdrehung

n $[n] = \frac{1}{s} = \text{Hz}$ Drehzahl, Anzahl Umdrehungen pro Zeit

f $[f] = \frac{1}{s} = \text{Hz}$ Umlauffrequenz, Anzahl Umdrehungen pro Zeit

N $[N] = 1$ Anzahl Umdrehungen

$$f = n = \frac{1}{T}$$

$$\omega = 2 \pi f$$

$$\varphi = N * 2 \pi = N * 360^\circ$$

Kreisbahn

Wenn sich ein Körper auf einer Kreisbahn um eine Drehachse bewegt, kann die Bewegung sowohl in den Translationskoordinaten (Position, Bahngeschwindigkeit, Bahnbeschleunigung entlang der Kreisbahn) als auch in den Rotationskoordinaten (Winkel, Winkelgeschwindigkeit, Winkelbeschleunigung) beschrieben werden. Der Kreisbahnradius r verknüpft die beiden Größen ...

Position s_B auf der Kreisbahn in m

$$s_B = \varphi r$$

Winkel φ für diese Position in rad

Bahngeschwindigkeit v_B in $\frac{m}{s}$

$$\vec{v}_B = \vec{\omega} * \vec{r}$$

$$v_B = \omega r$$

Winkelgeschwindigkeit ω in $\frac{rad}{s}$

Bahnbeschleunigung a_B in $\frac{m}{s^2}$

$$\vec{a}_B = \vec{\alpha} * \vec{r}$$

$$a_B = \alpha r$$

Winkelbeschleunigung α in $\frac{rad}{s^2}$

Damit sich ein Körper mit der Geschwindigkeit v_B auf einer Kreisbahn mit Radius r bewegt, ist die folgende

Zentripetal- bzw. Radialbeschleunigung a_Z erforderlich: $a_Z = \frac{v_B^2}{r} = \omega^2 r$

Newton'sche Axiome

1. Newton'sches Axiom **Trägheitsgesetz**

Ohne äussere Krafteinwirkung verharrt ein Körper im Zustand der Ruhe oder der geradlinig gleichförmigen Bewegung.

2. Newton'sches Axiom **Grundgesetz der Dynamik**

Die wirkende Kraft und die erzielte Beschleunigung sind einander proportional: $F \sim a$. Die Proportionalitätskonstante ist die Masse des Körpers: $F = m a$.

3. Newton'sches Axiom **Wechselwirkungsgesetz (actio = reactio)**

Jede Kraft \vec{F} besitzt eine Gegenkraft \vec{F}' (Reaktionskraft) von gleichem Betrag, aber entgegengesetzter Richtung: $\vec{F}' = -\vec{F}$. Die Angriffspunkte von \vec{F} und \vec{F}' liegen in zwei verschiedenen Körpern.

4. Newton'sches Axiom **Superpositionsprinzip** $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$

Das Superpositionsprinzip bzw. das Prinzip der ungestörten Überlagerung besagt, dass mehrere Kräfte \vec{F}_i , die auf einen Punkt oder starren Körper wirken, sich vektoriell zu einer resultierenden Kraft aufaddieren.

Kräfte und Arbeit

$\vec{F} = m \vec{a}$	Kraft ist Masse mal Beschleunigung. Grundgesetz der Dynamik
$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F s \cos[\varphi]$	Arbeit ist Kraft mal Weg
$P = \frac{dW}{dt}$	Leistung ist Arbeit pro Zeit
$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$	Leistung bei einer Kraft auf einen bewegten Körper
$\eta = \frac{P_{\text{nutzbar}}}{P_{\text{aufgenommen}}}$	Wirkungsgrad; oder auch $\eta = \frac{E_{\text{nutzbar}}}{E_{\text{aufgenommen}}}$

Kraft	Formel	Arbeit	Energie	
	F	$W = \Delta E$	E	
Schwerkraft	$F = m g$	$W = m g (h_2 - h_1)$	$E = m g h$	Lageenergie
Federkraft	$F = k s$	$W = \frac{1}{2} k (s_2^2 - s_1^2)$	$E = \frac{1}{2} k s^2$	Federspannenergie
Reibungskraft	$F = \mu F_N$	$W = \mu F_N s = Q$	Q	Wärmeverluste
Beschleunigende Kraft	$F = m a$	$W = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$	$E = \frac{1}{2} m v^2$	Bewegungsenergie

Tabelle Zusammenhang zwischen Kraft, Arbeit und Energie

Impuls

$\vec{p} = m \vec{v}$ bzw. $p = m v$	Linearer Impuls
$\vec{F} dt$	Kraftstoss
$\Delta \vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}[t] dt$ falls $\vec{F} = \text{konstant}$ $\vec{F} \Delta t$	Kraftstoss führt zu einer Impulsänderung.
$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \text{konstant}$ d.h. $m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots = m_1 v_1' + m_2 v_2' + \dots$	Impulserhaltungssatz in einem abgeschlossenen System.

Gerade zentrale Stöße

Begriffe: v_1, v_2, v_1', v_2'

Geschwindigkeiten der Körper 1 und 2 vor bzw. nach dem Stoss

$$v_1' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - (v_1 - v_2) m_2 k}{m_1 + m_2}$$

Geschwindigkeit des 1. Körpers nach dem Stoss

$$v_2' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - (v_2 - v_1) m_1 k}{m_1 + m_2}$$

Geschwindigkeit des 2. Körpers nach dem Stoss

(d.h. Index 1 und 2 vertauscht)

$$k = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2}$$

Stossparameter

$$W = -\Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

$$= \left[\frac{1}{2} * \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} * (v_1 - v_2)^2 \right] * (1 - k^2) = W_{\text{max}} (1 - k^2) \quad W = \text{Verformungsarbeit, Verluste}$$

Spezielle Stöße

$k = 0$ inelastischer Stoss (Impulserhaltung und $v_1' = v_2'$): $W = W_{\text{max}}$

$0 < k < 1$ teilelastischer Stoss $0 \text{ J} \leq W \leq W_{\text{max}}$

$k = 1$ elastischer Stoss (Erhaltung des Impulses und der kin. Energie) $W = 0 \text{ J}$

Trägheitsmoment, Drehimpuls

$J = \sum m_i r_i^2$ Trägheitsmoment J eines Körpers mit Massenpunkten m_i im Abstand r_i von der Drehachse.

$$\vec{L} = J \vec{\omega}$$

Drehimpuls \vec{L}

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

für eine Punktmasse mit Impuls \vec{p} im Abstand \vec{r} von der Drehachse

Drehimpulserhaltungssatz in einem abgeschlossenen System ...

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_n = \text{konstant}$$

Körper	Trägheitsmoment	Drehachse
Massenpunkt	$J_S = m r^2$	im Abstand r
Kugel	$J_S = \frac{2}{5} m r^2$	durch Kugelmittelpunkt
Vollzylinder	$J_S = \frac{1}{2} m r^2$	= Zylinderachse
Vollzylinder	$J_S = m \left(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right)$	senkrecht zur Zylinderachse
Hohlzylinder	$J_S = \frac{1}{2} m (r_i^2 + r_a^2)$	= Zylinderachse
Langer Stab	$J_S = \frac{1}{12} m l^2$	senkrecht zur Zylinderachse

Tabelle Trägheitsmomente J_S für verschiedene Körper konstanter Dichte. Die Drehachse verläuft durch den Schwerpunkt.

Satz von Steiner für eine Drehachse parallel zur Drehachse durch den Schwerpunkt ...

$$J_A = J_S + m s^2$$

Analogie Translation und Rotation

Physikalische Grösse	Formel	Beziehung	Formel	Physikalische Grösse
Masse	m		J	Trägheitsmoment
Kraft	$F = m a = \frac{dp}{dt}$	$M = F r$	$M = J \alpha = \frac{dL}{dt}$	Drehmoment
Arbeit	$W = F s$		$W = M \varphi$	Arbeit
Leistung	$P = F v$		$P = M \omega$	Leistung
Bewegungsenergie Translation	$E = \frac{1}{2} m v^2$		$E = \frac{1}{2} J \omega^2$	Bewegungsenergie Rotation
Impuls	$p = m v$	$L = p r$	$L = J \omega$	Drehimpuls
Kraftstoss	$F dt = dp$		$M dt = dL$	Drehmomentstoss

Tabelle Zusammenhang zwischen Grössen der Translation und Rotation

Rollen

Rollen kann verschieden interpretiert werden ...

- Rotation um den Auflagepunkt
- Translation des Schwerpunkts sowie Rotation um den Schwerpunkt

Rollbedingung: $v = \omega r$

- $v > \omega r$ Rutschen
- $v < \omega r$ Durchdrehen

Gravitation

Gravitationsfeldstärke

$$g = G \frac{M}{r^2} = \frac{F_G}{m}$$

Gravitationsfeld um einen Körper der Masse M

$$\text{Gravitationskonstante } G = 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$

Gravitationskraft

$$F_G = mg = G \frac{mM}{r^2}$$

Newton'sches Gravitationsgesetz

Arbeit im Gravitationsfeld

$$W = \int_{r_1}^{r_2} F_G dr = G m M \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Potentielle Energie

$$E = -G m M \frac{1}{r}$$

Potenzial: $\varphi = \frac{E}{m} = -G M \frac{1}{r}$

Fluchtgeschwindigkeit

$$v_F = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

$$\leftarrow \frac{1}{2} m v^2 = G m M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty} \right) = G m M \frac{1}{r}$$

Kreisbahngeschwindigkeit

$$v_K = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\leftarrow \text{Zentripetalkraft } \frac{m v^2}{r} = F_G = G \frac{mM}{r^2}$$

Körper	mittlerer Sonnenabstand in 10^6 km	Umlaufzeit in a	relative Masse m/m_{Erde}	mittlere Bahngeschwindigkeit in km/s	Fallbeschleunigung ³⁾ in m/s^2	mittlere Dichte in kg/dm^3	Äquatordurchmesser in 10^3 km	Rotationsdauer	numerische Exzentrizität
Sonne	—	—	333 000	—	273,7	1,41	1 392	31 d	—
Merkur	57,9	0,241	0,055 3	47,9	3,70	5,43	4,88	58,6 d	0,205 6
Venus	108,2	0,615	0,815	35,05	8,87	5,24	12,103	−243 d ^{*)}	0,006 8
Erde	149,6	1,000	1,000 ²⁾	29,8	9,81	5,52	12,756	23 h 56 min	0,016 7
Mars	227,9	1,881	0,107	24,14	3,71	3,94	6,794	24 h 37 min	0,093 4
Jupiter	778,3	11,86	317,8	13,1	23,1	1,33	143,0	9 h 55 min	0,048 4
Saturn	1 427	29,45	95,16	9,65	8,96	0,70	120,5	10 h 39 min	0,054 2
Uranus	2 871	84,02	14,54	6,80	8,69	1,30	51,11	−17 h 14 min ^{*)}	0,047 2
Neptun	4 498	164,8	17,15	5,43	11,00	1,76	49,5	16 h 07 min	0,008 6
Pluto ⁴⁾	5 906	247,9	0,004	4,74	0,6	2,0	2,3	−153 h 18 min ^{*)}	0,248 8
Mond	0,384 4 ¹⁾	27,32 d	0,012 30	1,02	1,62	3,34	3,475	27,32 d	0,054 9

¹⁾ mittlerer Erdbestand
²⁾ $m_{\text{Erde}} = 5,974 \cdot 10^{24}$ kg
³⁾ an der Oberfläche
⁴⁾ als Zwergplanet eingestuft, Werte z. T. unsicher
^{*)} Drehrichtung gegenläufig
 1 Jahr (a) = 365,25 d

Tabelle Daten des Sonnensystems (Quelle Horst Kuchling, Taschenbuch der Physik)

1. Kepler 'sches Gesetz

Die Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen, in deren gemeinsamen Brennpunkt die Sonne steht. Ellipse: siehe im Anhang "Mathematik für die Physik".

2. Kepler 'sches Gesetz

Die Verbindungsgerade Sonne-Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

3. Kepler 'sches Gesetz

Die Quadrate der Umlaufzeiten T der Planeten verhalten sich wie die Kuben der grossen Halbachsen a ihrer Bahn um die Sonne, d.h. $\frac{a^3}{T^2} = \text{konstant}$ für die verschiedenen Planeten.

Ruhende Flüssigkeiten

Dichte

Dichte $\rho = \frac{m}{V}$

Druck

Kolbendruck (Druck von aussen)	$p_{\text{Kolben}} = \frac{F_{\text{Normalkraft}}}{A}$	Druck = Kraft pro Fläche
Schweredruck	$p_{\text{Schwere}} = \rho g h$	$h > 0$
Hydrostatischer Druck	$p_{(\text{hydro}) \text{statisch}} = p_{\text{Kolben}} + p_{\text{Schwere}}$	
Dynamischer Druck (Staudruck)	$p_{\text{dynamisch}} = \frac{1}{2} \rho v^2$	
Gesamtdruck	$p_{\text{gesamt}} = p_{\text{Kolben}} + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2$	$h > 0$

Kompressibilität

Kompression: $\Delta V = -\kappa V \Delta p$ κ : Kompressibilität

Auftrieb

Der Auftrieb ist gleich der Gewichtskraft der vom Körper verdrängten Flüssigkeit.

$$F_{\text{Auftrieb}} = V_K \cdot \rho_{\text{Fl}} \cdot g = m_{\text{Fl,verdrängt}} \cdot g$$

Luftdruck der Atmosphäre

Barometrische Höhenformel:	$p[h] = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}}$	Annahme: $T = \text{konstant}$ $p_0 = 1013.25 \text{ hPa}, \rho_0 = 1.293 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Internationale Höhenformel:	$p[h] = 1013.25 \text{ hPa} \cdot \left(1 - \frac{6.5 h}{288 \text{ km}}\right)^{5.255}$	bis 11 km (Troposphäre)
Normatmosphäre:	siehe Tabellen	

Strömungen

Reibungsfreie Strömung (inkompressibel)

Volumenstrom $\dot{V} = \frac{V}{t} = A v$

Kontinuitätsgleichung $A_1 v_1 = A_2 v_2$ bzw. $A v = \text{konstant}$

Bernoulli'sche Druckgleichung $p = p_{\text{statisch}} + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{konstant}$ (h positiv nach oben)

Bei einer stationären Strömung ist dieser Ausdruck entlang einer Stromlinie konstant und entspricht bei $h = 0$ dem Gesamtdruck.

Druckmessungen

Pitot-Rohr	Gesamtdruck
Prandtl'sches Staurohr	Dynamischer Druck
Venturi-Rohr	Differenz zweier statischer Drücke (\rightarrow Geschwindigkeit)

Laminare Strömung

Innere Reibungskraft $F_R = \frac{\eta A v}{d} = \eta A \frac{v}{d}$ Gradient $\frac{v}{d}$
 η **dynamische Viskosität**, Zähigkeit, Koeffizient der inneren Reibung

Laminare Strömung in einem Rohr:

Strömungswiderstand $F_R = 8 \pi \eta L \bar{v}$

Geschwindigkeitsprofil $v = \frac{\Delta p}{4 L \eta} (R^2 - r^2)$

Volumenstrom $\frac{V}{t} = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8 \eta L}$ **Gesetz von Hagen-Poiseuille**

Laminare Strömung um eine Kugel:

Reibungskraft $F_R = 6 \pi \eta r v$ **Stokes'sches Gesetz**

Turbulente Strömung

Strömungswiderstand $F_W = c_W A \frac{1}{2} \rho v^2$
Widerstandsbeiwert c_W , Stirnfläche A

Strömungsleistung $P = F_W v = c_W A \frac{1}{2} \rho v^3$

Reynold'sche Zahl $Re = \frac{L \rho_{\text{Fluid}} v}{\eta}$

Molekularkräfte

Oberflächenspannung

Die Oberflächenspannung wirkt in der Oberfläche. Im Gleichgewicht wirkt auf die Teilchen der Oberfläche eine resultierende Kraft, die in Richtung des Flüssigkeitsinneren gerichtet ist. Eine Verringerung der Oberfläche führt daher zu einem Energiegewinn, welcher die Ursache der Oberflächenspannung ist.

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A}$$

Oberflächenspannung, $[\sigma] = \frac{\text{J}}{\text{m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{m}}$

Oberflächenspannung und die Bügelmethode

Die Zugkraft F und die Breite des Bügels l und die Oberflächenspannung σ stehen in folgendem Zusammenhang ...

$$\sigma = \frac{F}{2l}$$

Messung der Oberflächenspannung mithilfe der Bügelmethode

Oberflächenspannung in Flüssigkeitstropfen oder Gasblasen

Wenn ein kugelförmiger Flüssigkeitstropfen sich in einem Gas oder eine kugelförmige Gasblase sich innerhalb einer Flüssigkeit befindet und eine Grenzschicht Flüssigkeit/Gas bildet, dann hängen der Druck p innerhalb der Kugel mit Radius r und die Oberflächenspannung σ in folgender Weise zusammen ...

$$p = \frac{2\sigma}{r}$$

(Über)druck innerhalb eines Flüssigkeitstropfens oder einer Gasblase

Eine Seifenblase hat zwei Oberflächen und deshalb gilt ...

$$p = \frac{4\sigma}{r}$$

(Über)druck innerhalb einer Seifenblase

Kapillarität

Unter Kapillarität versteht man die Erscheinung, dass in einer engen Röhre (Kapillare) eine Flüssigkeit höher und tiefer steht, als es nach dem Gesetz von den verbundenen Gefäße sein dürfte. Die kapillare Steighöhe beträgt ...

$$h = \frac{2 \sigma \cos[\alpha]}{\rho g r}$$

σ (Oberflächenspannung der Flüssigkeit), α (Randwinkel),
 ρ (Dichte der Flüssigkeit), g (Erdbeschleunigung),
 r (Radius des Röhrchens)

Elastizität fester Körper

Proportionalitätsgrenze, Fließgrenze, Zerreissgrenze

Je nach Grösse der Zug- oder Schubkraft tritt eine unterschiedliche Dehnung bzw. Deformation auf.

Unterhalb der Proportionalitätsgrenze: Für diese Kräfte ist die Dehnung proportional zur Kraft. Bei Wegfall der Kraft nimmt der Körper wieder seine ursprüngliche Form an (elastische Verformung).

Zwischen Proportionalitätsgrenze und Fließgrenze ergibt sich eine nichtlineare Dehnung. Bei Wegfall der Kraft nimmt der Körper auch wieder seine ursprüngliche Form an (elastische Verformung).

Zwischen Fließgrenze und Zerreissgrenze ergibt sich auch eine nichtlineare Dehnung und der Körper nimmt bei Wegfall der Kraft nicht mehr seine ursprüngliche Form an. Der Körper wurde **plastisch** deformiert.

Überhalb der Zerreissgrenze bricht der Körper auseinander.

Kraft auf einen Stab

Wenn auf einen Stab mit der Länge l , der Breite b und dem Querschnitt A eine (Normal)kraft F_N wirkt, dann wird die Länge des Stabes bei einer Zugkraft um Δl verlängert und bei einer Druckkraft um Δl verkürzt. Gleichzeitig ändert sich auch seine Breite um Δb und sein Volumen um ΔV .

Mit den folgenden Bezeichnungen ...

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad \text{Dehnung bzw. Längsdehnung, relative Längenänderung}$$
$$\sigma = \frac{F_N}{A} \quad \text{Spannung} \quad \begin{array}{ll} \sigma > 0 & \text{Zugspannung} \\ \sigma < 0 & \text{Druckspannung} \end{array}$$
$$\epsilon_q = \frac{\Delta b}{b} \quad \text{Querdehnung, relative Breitenänderung}$$

folgen die folgenden Beziehungen ...

$$\sigma = E \epsilon \quad \text{oder ausführlich} \quad \frac{F}{A} = E \frac{\Delta l}{l} \quad E \quad \text{Elastizitätsmodul}$$

Hooke'sches Gesetz: Dehnung und Spannung sind proportional zueinander.

$$\epsilon_q = -\mu \epsilon \quad \text{oder ausführlich} \quad \frac{\Delta b}{b} = -\mu \frac{\Delta l}{l} \quad \mu \quad \text{Poisson Zahl}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon (1 - 2\mu)$$

Allseitiger Druck auf einen Körper

Wenn auf einen Körper mit Volumen V allseitig ein zusätzlicher Druck Δp ausgeübt wird, dann verkleinert sich sein Volumen. Es ergibt sich die folgende Beziehung für die relative Volumenänderung $\frac{\Delta V}{V}$...

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{K} \Delta p$$

K **Kompressionsmodul**

es gilt auch: $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$

Scherung eines Körpers

Wenn die Kraft F auf zwei gegenüberliegenden Flächen A (die einen Abstand d voneinander haben) eines Körpers und tangential zu diesen Flächen angreift, so werden diese Flächen gegeneinander verschoben. Mit den Bezeichnungen ...

τ **Schubspannung** $\tau = \frac{F}{A}$

γ **Schiebung**, Scherung, Schubwinkel (d.h. γ ist ein Winkel in rad)

mit $\tan[\gamma] = \frac{a}{d} = \frac{\text{Verschiebung } a \text{ der Fläche } A \text{ gegeneinander}}{d} \approx \gamma$

G **Schubmodul** (bzw. Gleitmodul)

Dann ergibt sich die folgende Beziehung ...

$$\tau = G \gamma$$

und ausführlicher: $\frac{F}{A} = G \frac{a}{d}$

es gilt auch: $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$

Drillung eines Körpers

Bei der Drillung (Torsion) tritt auf Grund eines Drehmoments M eine Verdrehung der Schichten um den Drillwinkel φ auf. Für einen zylindrischen Stab der Länge l und Radius r gilt die folgende Beziehung ...

$$\varphi = \frac{2l}{\pi G r^4} M$$

G **Torsionsmodul**

es gilt: Torsionsmodul = Schubmodul = Gleitmodul

Mechanische Schwingungen

Freie Ungedämpfte Schwingung (ω_0)

Wenn bei einer Auslenkung y eine Rückstellkraft F_R wirkt, die proportional zur Auslenkung ist und zurück zur Gleichgewichtslage zeigt, dann resultiert eine **harmonische** (d.h. durch Sin oder Cos beschreibbare) Schwingung. Falls also ...

$$(1) \quad F_R = -k y \quad \text{bzw. präziser wegen der Zeitabhängigkeit } F_R[t] = -k y[t]$$

und ...

$$(2) \quad F_R = m a = m y'' \quad \text{bzw. präziser wegen der Zeitabhängigkeit } F_R[t] = m a[t] = m y''[t]$$

folgt mit (2) = (1) ...

$$m y''[t] = -k y[t] \quad \text{bzw.} \quad y''[t] + \frac{k}{m} y[t] = 0$$

Mit der Definition $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ folgt die **Differentialgleichung** (DGL) für eine freie ungedämpfte Schwingung ...

$$\boxed{y''[t] + \omega_0^2 y[t] = 0} \quad \text{DGL für eine freie ungedämpfte Schwingung}$$

Die Lösung dieser Gleichung hat die Form ...

$$\boxed{y[t] = \hat{y} \sin[\omega_0 t + \varphi_0]}$$

- Die Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ legen die Amplitude \hat{y} und den Nullphasenwinkel φ_0 fest.
- Die maximale Auslenkung \hat{y} der Schwingung ändert sich nicht mit der Zeit: es handelt sich um eine freie und ungedämpfte Schwingung.

An Stelle der Sinusfunktion kann auch die Cosinusfunktion verwendet werden ...

$$\boxed{y[t]} = \hat{y} \sin[\omega_0 t + \varphi_0] = \hat{y} \cos\left[\omega_0 t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2} \text{ rad}\right] = \boxed{\hat{y} \cos[\omega_0 t + \varphi_0]}$$

oder auch, da für alle Winkel gilt: $\sin[\alpha + \beta] = \sin[\alpha] \cos[\beta] + \cos[\alpha] \sin[\beta]$
 $\rightarrow \sin[\omega t + \varphi_0] = \sin[\omega t] \cos[\varphi_0] + \cos[\omega t] \sin[\varphi_0]$

$$\boxed{y[t] = y_1^* \sin[\omega_0 t] + y_2^* \cos[\omega_0 t]}$$

mit	$y[t]$	Auslenkung zur Zeit t
	\hat{y}	Amplitude, Schwingungsweite, maximale Auslenkung
	$\varphi[t]$	Phase zur Zeit t ; $\varphi[t] = \omega_0 t + \varphi_0$ oder $\varphi[t] = \omega_0 t + \varphi_0$
	φ_0	Nullphasenwinkel, Phase zur Zeit $t = 0$, $\varphi_0 = \varphi[0]$
	y_1^*, y_2^*	von den Anfangsbedingungen abhängige konstante Koeffizienten
	ω_0	Kreisfrequenz mit $\omega_0 = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{T}$
	f	Frequenz, Anzahl Schwingungen pro Zeit, $f = \frac{1}{T}$
	T	Schwingungsdauer, Periodendauer
sowie	$y_1^* = \hat{y} \cos[\varphi_0]$	$\hat{y} = \sqrt{y_1^{*2} + y_2^{*2}}$
	$y_2^* = \hat{y} \sin[\varphi_0]$	$\tan[\varphi_0] = \frac{y_2^*}{y_1^*}$ Quadrant beachten!

Je nach Anfangsbedingung hat die eine oder andere Form Vorteile: z.B. wenn am Anfang die Auslenkung maximal ist, dann empfiehlt sich die Form mit der Cosinus Funktion.

Durch einfache Differentiation (oder mittels $v_{\text{Bahn}} = \omega_0 r$ und $a_Z = \omega_0^2 r$ für eine Kreisbewegung) können aus der momentanen Auslenkung die momentane Geschwindigkeit und Beschleunigung gefunden werden.

$$y[t] = \hat{y} \sin[\omega_0 t + \varphi_0]$$

$$v[t] = y'[t] = (\hat{y} \sin[\omega_0 t + \varphi_0])' = \hat{y} \omega_0 \cos[\omega_0 t + \varphi_0] = \hat{v} \cos[\omega_0 t + \varphi_0]$$

$$a[t] = v'[t] = y''[t] = (\hat{y} \omega_0 \cos[\omega_0 t + \varphi_0])' = -\hat{y} \omega_0^2 \sin[\omega_0 t + \varphi_0] = -\hat{a} \sin[\omega_0 t + \varphi_0]$$

Daraus folgt für die Amplituden ...

$$\hat{v} = \omega_0 \hat{y}$$

$$\hat{a} = \omega_0 \hat{v} = \omega_0^2 \hat{y}$$

Bei einer Schwingung wird laufend potentielle Energie ($E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k y[t]^2$ bei der horizontalen Masse-Feder Schwingung) in Bewegungsenergie ($E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v[t]^2$) umgewandelt und umgekehrt. Die Totalenergie bleibt konstant ...

$$E_{\text{total}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = E_{\text{kin,max}} = \frac{1}{2} m \hat{v}^2 = E_{\text{pot,max}} = \frac{1}{2} k \hat{y}^2 \quad \text{für Masse-Feder Schwinger}$$

Freie Gedämpfte Schwingung (ω_d)

In der Regel nimmt auf Grund von Reibung und anderen Verlusten die maximale Auslenkung mit der Zeit ab. Mit dem Ansatz eines Dämpfungsterms $F_D = -\beta v[t]$, der proportional zum Betrag der Geschwindigkeit und ihr entgegengerichtet ist, folgt ...

$$F[t] = F_R + F_D = -k y[t] - \beta v[t] = -k y[t] - \beta y'[t] = m a = m y''[t]$$

bzw. mit der Definition $\delta = \frac{\beta}{2m}$ und wiederum $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$...

$$y''[t] + 2\delta y'[t] + \omega_0^2 y[t] = 0 \quad \text{DGL für eine freie gedämpfte Schwingung}$$

β Dämpfungskonstante

δ Abklingkoeffizient

Je nach Grösse der Dämpfungskonstanten β bzw. des Abklingkoeffizienten δ unterscheidet man die folgenden vier "Schwingungstypen" ...

$\delta = 0$	ungedämpfte Schwingung
$0 < \delta < \omega_0$	gedämpfte Schwingung
$\delta = \omega_0$	aperiodischer Grenzfall (keine Schwingung)
$\delta > \omega_0$	Kriechfall (keine Schwingung)

Allgemeine und spezielle Lösungen

Im Folgenden werden für die vier Fälle sowohl die allgemeinen Lösungen, deren Parameter (y^* , φ_0 , ...) von den Anfangsbedingungen abhängen, als auch Lösungen für spezielle Anfangsbedingungen angegeben. Dabei gilt jeweils ...

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad \omega'_d = \sqrt{-(\omega_0^2 - \delta^2)} \quad y^* e^{-\delta t}: \text{Hüllkurve}$$

Ungedämpfte Schwingung

$$\delta = 0$$

Allgemeine Lösung: $y[t] = \hat{y} \sin[\omega_0 t + \varphi_0] = \hat{y} \cos[\omega_0 t + \gamma_0] = y_1^* \sin[\omega_0 t] + y_2^* \cos[\omega_0 t]$

speziell $y[0] = 0, v[0] = v_0$: $y[t] = \frac{v_0}{\omega_0} \sin[\omega_0 t]$

speziell $y[0] = y_0, v[0] = 0$: $y[t] = y_0 \cos[\omega_0 t]$

Gedämpfte Schwingung

$$0 < \delta < \omega_0$$

Allgemeine Lösung: $y[t] = \dot{y}^* \sin[\omega_d t + \varphi_0] e^{-\delta t} = \left(y_1^* \sin[\omega_d t] + y_2^* \cos[\omega_d t] \right) e^{-\delta t}$

speziell $y[0] = 0, v[0] = v_0$: $y[t] = \frac{v_0}{\omega_d} \sin[\omega_d t] e^{-\delta t}$

speziell $y[0] = y_0, v[0] = 0$: $y[t] = y_0 \frac{\omega_0}{\omega_d} \cos\left[\omega_d t - \text{ArcSin}\left[\frac{\delta}{\omega_0}\right]\right] e^{-\delta t}$

Aperiodischer Grenzfall

$$\delta = \omega_0$$

Allgemeine Lösung: $y[t] = y_1^* e^{-\delta t} + y_2^* t e^{-\delta t} = (y_1^* + y_2^* t) e^{-\delta t}$

speziell $y[0] = 0, v[0] = v_0$: $y[t] = v_0 t e^{-\delta t}$

speziell $y[0] = y_0, v[0] = 0$: $y[t] = y_0 (1 + \delta t) e^{-\delta t}$

Kriechfall

$$\delta > \omega_0$$

Allgemeine Lösung: $y[t] = \dot{y}^* \text{Sinh}[\omega'_d t + \varphi_0] e^{-\delta t} = \left(y_1^* \text{Sinh}[\omega'_d t] + y_2^* \text{Cosh}[\omega'_d t] \right) e^{-\delta t}$

speziell $y[0] = 0, v[0] = v_0$: $y[t] = \frac{v_0}{\omega'_d} \text{Sinh}[\omega'_d t] e^{-\delta t}$

speziell $y[0] = y_0, v[0] = 0$: $y[t] = y_0 \left(\frac{\delta}{\omega'_d} \text{Sinh}[\omega'_d t] + \text{Cosh}[\omega'_d t] \right) e^{-\delta t}$

Erzwungene Gedämpfte Schwingung

Wenn von aussen zusätzlich eine periodisch veränderliche Kraft F_E wirkt, spricht man von erzwungener Schwingung. Mit $F_E = \hat{F}_E \cos[\omega t]$ folgt ...

$$F[t] = F_E[t] + F_R[t] + F_D[t] = m y''[t] \quad \text{bzw.}$$

$$y''[t] + 2\delta y'[t] + \omega_0^2 y[t] = \frac{\hat{F}_E}{m} \cos[\omega t]$$

Der genaue Verlauf dieser Schwingung hängt von den Anfangsbedingungen ab. Nach einer gewissen Zeit - der sogenannten Einschwingzeit - stellt sich jedoch ein stationärer Zustand ein ...

$$y[t] = \hat{y} \cos[\omega t - \alpha] \quad \text{Schwingungsverlauf im eingeschwungenen Zustand}$$

mit α Phasenverzögerung des Schwingers gegenüber dem Erreger

Die maximale Auslenkung \hat{y} sowie die Phasenverzögerung α sind gegeben durch ...

$$\hat{y} = \frac{\hat{F}_E}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2}} = \frac{\hat{F}_E}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}$$

$$\alpha = \text{ArcTan}\left[\frac{\omega \beta}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\right] = \text{ArcTan}\left[\frac{2\omega \delta}{\omega_0^2 - \omega^2}\right]$$

Die Amplitude wird maximal bei der **Resonanzkreisfrequenz** ω_R ...

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{2m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \quad \hat{y}_R = \frac{\hat{F}_E}{2\delta m \omega_d}$$

Beispiele harmonischer Schwingungen

Die obigen mathematischen Herleitungen gelten sowohl für Kräfte als auch für Drehmomente ...

$$F_R[t] = -k x[t] \quad \text{Grundgesetz der Dynamik}$$

$$F_R[t] = m a[t] = m x''[t]$$

Achtung: hier wird x statt y verwendet.

$$M_R[t] = -D \varepsilon[t]$$

$$M_R[t] = J \alpha[t] = J \varepsilon''[t]$$

Achtung: ε ist hier der Drehwinkel

Lineare Federschwingung

Für die lineare Federschwingung gilt mit $F = -k x$ und $F = m a$...

$$-k x[t] = m a[t] \quad \text{bzw.} \quad \boxed{x''[t] + \frac{k}{m} x[t] = 0} \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Drehschwingung

Für die Drehschwingung gilt mit $M = -D \varepsilon$ und $M = J \alpha$...

$$-D \varepsilon[t] = J \alpha[t] \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\varepsilon''[t] + \frac{D}{J} \varepsilon[t] = 0} \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}}$$

Mathematisches Pendel (für kleine Amplituden)

Für das mathematische Pendel gilt mithilfe des Drehmoments $M = -m g \sin[\varepsilon] l \approx -m g \varepsilon l$, des Trägheitsmoments $J = m l^2$ und $M = J \alpha$...

$$-m g \varepsilon l = m l^2 \alpha[t] \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\varepsilon''[t] + \frac{g}{l} \varepsilon[t] = 0} \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Für das mathematische Pendel gilt mithilfe der Kraft $F = -m g \sin[\varepsilon] \approx -m g \varepsilon = -m g \frac{b}{l}$, der Bogenlänge $b = \varepsilon r$ und $F = m a$...

$$-m g \frac{b[t]}{l} = m a[t] \quad \text{bzw.} \quad \boxed{b''[t] + \frac{g}{l} b[t] = 0} \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Physisches Pendel (für kleine Amplituden)

Für das physische Pendel gilt mithilfe des Drehmoments $M = -m g y = -m g s \sin[\varepsilon] \approx -m g s \varepsilon$ und $M = J_A \alpha$...

$$-m g s \varepsilon[t] = J_A \alpha[t] \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\varepsilon''[t] + \frac{m g s}{J_A} \varepsilon[t] = 0} \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{m g s}{J_A}} = \sqrt{\frac{m g s}{J_S + m s^2}}$$

Flüssigkeitsschwingung

Für die Flüssigkeitsschwingung gilt mithilfe von $F = -m_{\text{oberhalb}} g = -\rho A 2 h g$ und $F = m_{\text{total}} a = \rho A l a$...

$$-\rho A 2 h[t] g = \rho A l a[t] \quad \text{bzw.} \quad \boxed{h''[t] + \frac{2g}{l} h[t] = 0} \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{l}}$$

Mechanische Wellen

Ausbreitung

Jede Funktion der Form $f[x - ct]$ oder $f[x + ct]$ beschreibt eine mit der Geschwindigkeit c von links nach rechts (in Richtung der x -Achse) bzw. von rechts nach links propagierende Welle und erfüllt die Wellengleichung ...

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}$$

Wellengleichung

Für eine harmonische Welle folgt (Statt der Sinus Funktion könnte auch die Cosinus Funktion verwendet werden) ...

$$y[x, t] = \hat{y} * \sin[kx - \omega t] = \hat{y} * \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{T} t\right] = \hat{y} * \sin[k(x - ct)] = \hat{y} * \sin\left[\omega\left(\frac{x}{c} - t\right)\right]$$

$$\text{Kreisfrequenz } \omega \qquad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{mit Periodendauer } T$$

$$\text{Wellenzahl } k \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \text{mit Wellenlänge } \lambda$$

$$\text{Ausbreitungsgeschwindigkeit } c \qquad \boxed{c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = \frac{\omega}{k}}$$

Der Phasenwinkel φ_0 wurde der Übersichtlichkeit halber weggelassen.

d.h. $\hat{y} * \sin[kx - \omega t]$ statt $\hat{y} * \sin[kx - \omega t + \varphi_0]$

Bemerkung: Ingenieure (und auch Kuchling) verwenden häufig $\sin[\omega t - kx]$ statt $\sin[kx - \omega t]$.

Mechanische Wellen haben die folgende Ausbreitungsgeschwindigkeit ...

$$c = \sqrt{\frac{F}{\rho A}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$$

elastische **Querwelle** in einem Festkörper

Kraft F , Dichte ρ , Querschnittsfläche A , Spannung σ

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

elastische **Längswelle** in einem Festkörper (Stab)

Elastizitätsmodul E , Dichte ρ

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{\kappa \rho}}$$

Längswelle in einer Flüssigkeit

Kompressionsmodul K , Dichte ρ , Kompressibilität κ (Tab 4)

$$c = \sqrt{\frac{\chi p}{\rho}} = \sqrt{\chi R_j T}$$

Längswelle in einem Gas

Druck p , Dichte ρ , Isentropenexponent χ (Tab 18),

spez. Gaskonstante R_j , Temperatur T

mit den Einheiten: $[c] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $[F] = \text{N}$, $[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $[A] = \text{m}^2$, $[\sigma] = [E] = [K] = \left[\frac{1}{\kappa}\right] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa} = \frac{\text{kg}}{\text{m s}^2}$, $[\chi] = 1$, $[R_j] = \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$

Reflexion, Brechung

Gegeben seien zwei Medien (Materialien) mit den Wellengeschwindigkeiten c_1 bzw. c_2 .

Wenn sich eine Welle im Medium 1 ausbreitet und auf das Medium 2 trifft, dann wird ein Teil der Welle reflektiert und ein Teil der Welle transmittiert. Es gilt ...

... für die Richtung der reflektierten Welle ...

$$\alpha_{\text{einfallend}} = \alpha_{\text{reflektiert}}$$

Reflexionsgesetz

Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel

... für die Richtung der transmittierten (gebrochenen) Welle ...

$$\frac{\sin[\alpha_{\text{einfallend}}]}{c_1} = \frac{\sin[\alpha_{\text{gebogen}}]}{c_2} \quad \text{Brechungsgesetz}$$

Der reflektierte und der gebrochene Strahl verlaufen in der Ebene, die durch den einfallenden Strahl und die Normale zur Oberfläche festgelegt wird. Die Winkel werden vom Lot ausgehend gemessen.

Die Phase erleidet dabei ...

... bei **Reflexion** einen Phasensprung von 180° , falls $c_2 < c_1$ ist.

... bei **Reflexion** keinen Phasensprung, falls $c_2 > c_1$ ist.

... bei **Transmission** keinen Phasensprung.

Energie im Wellenfeld

In jeder Welle wird Energie transport, die als Schwingungsenergie von Teilchen zu Teilchen weitergeleitet wird. Es ergeben sich die folgenden Größen:

Energiedichte w (d.h. $\frac{\text{Energie}}{\text{Volumen}}$)

$$w = \frac{1}{2} \rho \hat{v}^2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \hat{y}^2$$

$$[w] = \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

Energie E (d.h. die Energie in der Zeit t durch die Fläche A): $E = w A s = w A c t$

$$[E] = \text{J}$$

Leistung, Energiestrom P (d.h. $\frac{\text{Energie}}{\text{Zeit}}$)

$$P = \frac{E}{t} = w A c$$

$$[P] = \text{W}$$

Intensität bzw. Energieflussdichte J (d.h. $\frac{\text{Energie}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}}$)

$$J = \frac{E}{t A} = w c$$

$$[J] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Impedanz Z

$$J = w c = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \hat{y}^2 c = \left(\frac{1}{2} \omega^2 \hat{y}^2 \right) * \rho c = \left(\frac{1}{2} \omega^2 \hat{y}^2 \right) * Z$$

$$\text{d.h. } Z = \rho c$$

Reflexionskoeffizient (für Amplitude):

$$r_{12} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Transmissionskoeffizient (für Amplitude):

$$t_{12} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

Superposition (Interferenz)

Superposition

Superpositionsprinzip

Wird ein Körper zu mehreren Schwingungen angeregt, so kommt es zu einer Überlagerung (Interferenz). Das heisst, dass sich die **Schwingungen** gegenseitig nicht beeinflussen und die einzelnen Schwingungsverläufe addiert werden.

$$y_R[t] = y_1[t] + y_2[t]$$

Superpositionsprinzip

Auch wenn zwei **Wellen** ein Medium durchlaufen gilt das Prinzip der ungestörten Überlagerung.

$$y_R[x, t] = y_1[x, t] + y_2[x, t]$$

Superpositionsprinzip

Verstärkung und Auslöschung

Für die Überlagerung zweier harmonischer Wellen ...

$$y_R[x, t] = \hat{y}_1 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{T} t + \varphi_{0,1}\right] + \hat{y}_2 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{T} t + \varphi_{0,2}\right] = \hat{y}_1 \sin[\varphi_1] + \hat{y}_2 \sin[\varphi_2]$$

bestimmt die Phasendifferenz $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, ob maximale Verstärkung oder maximale Auslöschung resultiert.

$$\Delta\varphi = i * (2\pi) = (2i) * \pi$$

maximale Verstärkung

oder

$$\Delta s = i * \lambda$$

$$\Delta\varphi = \left(i + \frac{1}{2}\right) * 2\pi = (2i + 1) * \pi$$

maximale Abschwächung

$$\Delta s = \left(i + \frac{1}{2}\right) * \lambda$$

mit $i \in \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

Schwingungen gleicher Richtung und Frequenz

Die Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen gleicher Frequenz ergibt wieder eine harmonische Schwingung.

$$y_R[t] = \hat{y}_1 \sin[\omega t + \varphi_{0,1}] + \hat{y}_2 \sin[\omega t + \varphi_{0,2}]$$
$$= \hat{y}_R \sin[\omega t + \varphi_{0,R}]$$

| Zeigerdiagramm und Cosinussatz

$$\text{mit } \hat{y}_R = \sqrt{\hat{y}_1^2 + \hat{y}_2^2 + 2\hat{y}_1\hat{y}_2 \cos[\varphi_{0,1} - \varphi_{0,2}]}$$

$$\tan[\varphi_{0,R}] = \frac{\hat{y}_1 \sin[\varphi_{0,1}] + \hat{y}_2 \sin[\varphi_{0,2}]}{\hat{y}_1 \cos[\varphi_{0,1}] + \hat{y}_2 \cos[\varphi_{0,2}]}$$

Quadrant beachten!

Schwingungen gleicher Richtung, gleicher Amplitude und ungleicher Frequenz

Diese Überlagerung führt zu einer **Schwebung**: die niederfrequente Schwingung $\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)$ moduliert eine hochfrequente Schwingung $\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)$.

$$y_R[t] = \hat{y}_1 \sin[\omega_1 t] + \hat{y}_1 \sin[\omega_2 t]$$

| Zweiter Summensatz

$$= 2\hat{y}_1 \cos\left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right] \sin\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right]$$

Schwingungen ungleicher Richtung, ungleicher Amplitude und gleicher Frequenz

Wenn Schwingungen in zwei zueinander senkrechten Richtungen mit gleicher Frequenz stattfinden

(z.B. Auslenkung $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ oder **Polarisation** $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$) ...

$$x[t] = \hat{x} \sin[\omega t + \varphi_{0,x}]$$

$$y[t] = \hat{y} \sin[\omega t + \varphi_{0,y}]$$

dann gilt für die momentane Auslenkung zur Zeit t ...

$$|\vec{x}| = \sqrt{x[t]^2 + y[t]^2}$$

Betrag des Vektors

$$\tan[\varepsilon] = \frac{y[t]}{x[t]}$$

Winkel ε bezogen auf die x-Achse

Die Spitze des Vektors \vec{x}

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x[t] \\ y[t] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x} \sin[\omega t + \varphi_{0,x}] \\ \hat{y} \sin[\omega t + \varphi_{0,y}] \end{pmatrix}$$

beschreibt im Laufe der Zeit eine **Ellipse**.

Spezialfälle (mit der Definition $\Delta\varphi = \varphi_{0,y} - \varphi_{0,x}$):

▪ $\Delta\varphi = 0, \Delta\varphi = \pi$

Gerade (entartete Ellipse)

▪ $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$

Achsen der Ellipse fallen mit den Koordinatenachsen zusammen

▪ $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}, \hat{x} = \hat{y}$

Kreis (spezielle Ellipse)

Schwingungen ungleicher Richtung, ungleicher Amplitude und ungleicher Frequenz

Wenn Schwingungen in zwei zueinander senkrechten Richtungen mit ungleicher Frequenz stattfinden ...

$$x[t] = \hat{x} \sin[\omega_x t + \varphi_{0,x}] \quad y[t] = \hat{y} \sin[\omega_y t + \varphi_{0,y}]$$

dann ergeben sich geschlossene Bahnkurven (**Lissajou Figuren**), wenn die beiden Frequenzen ein rationales Verhältnis bilden. Die Periodendauer ist gegeben durch das kgV der beiden Periodendauern T_x und T_y .

Bei einem irrationalen Verhältnis der Frequenzen wiederholen sich die Bahnkurven nicht.

Zwei gegeneinander laufende Wellen

Die Überlagerung zweier gegeneinander laufender Wellen (gleicher Frequenz und Amplitude) ergibt eine **stehende Welle**.

$$\begin{aligned} y_R[t] &= \hat{y}_1 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda} x + \frac{2\pi}{T} t\right] + \hat{y}_1 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{T} t\right] && | \text{Zweiter Summensatz} \\ &= 2 * \hat{y}_1 * \cos\left[2\pi \frac{t}{T}\right] * \sin\left[2\pi \frac{x}{\lambda}\right] \end{aligned}$$

Übergang zwischen zwei Medien (Dielektrika)

Wenn eine Welle an einem Übergang Medium 1 / Medium 2 reflektiert wird, erleidet sie ...

... einen **Phasensprung** von π

wenn $c_2 < c_1$ (bzw. Brechzahl $n_2 > n_1$)

d.h. bei Reflexion am dichteren Medium.

... keinen Phasensprung

wenn $c_2 > c_1$ (bzw. Brechzahl $n_2 < n_1$)

Bei der Transmission erleidet die Welle nie einen Phasensprung.

Schwingende Saite

Eine schwingende Saite der Länge L kann wegen $c = f \lambda$, $c = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$ und $i \frac{\lambda}{2} = L$ ($i = 1, 2, \dots$) die folgenden Frequenzen liefern ...

$$f_i = \frac{c}{\lambda_i} = i \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\rho A}} \quad i = 1, 2, \dots \text{ bzw. } i \in \mathbb{N}^+$$

Schwingende Luftsäule

Bei einer Pfeife gibt es beim Mundstück und beim offenen Ende einen Schwingungsbauch, am geschlossenen Ende einen Schwingungsknoten. Dies führt mit $c = f \lambda$ auf die folgenden Frequenzen ...

offene Pfeife	$L = i \frac{\lambda_i}{2}$	$f_i = \frac{c}{\lambda_i} = \frac{c}{2L} i = \frac{c}{4L} (2i)$	$i = 1, 2, \dots$
geschlossene Pfeife	$L = (2i - 1) \frac{\lambda_i}{4}$	$f_i = \frac{c}{\lambda_i} = \frac{c}{4L} (2i - 1)$	$i = 1, 2, \dots$

Schallgeschwindigkeit in Gasen

Für Gase gilt $c = \sqrt{\frac{\chi p}{\rho}}$. Mithilfe von $pV = m R_i T$ bzw. $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p}{R_i T}$ folgt daraus ...

$$c = \sqrt{\frac{\chi p}{\rho}} = \sqrt{\chi R_i T}$$

Daraus folgt für die Temperaturabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit in Luft ($R_i = 287 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$, $\chi = 1.402$) ...

$$c = \sqrt{\chi R_i T} = \sqrt{1.402 \cdot 287 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} (273.15 \text{ K} + t)} \approx 331.6 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 0.6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \frac{t}{^\circ\text{C}}$$

Dopplereffekt

Ein Sender und ein Empfänger bewegen sich auf einer gemeinsamen Geraden mit den Geschwindigkeiten v_S bzw. v_E . Wenn der Sender einen Ton der Frequenz f_S aussendet, dann hört der Empfänger einen Ton der Frequenz f_E ...

$$f_E = f_S \frac{c - v_E}{c - v_S}$$

Dabei ist c die Geschwindigkeit der Schallwelle. Das Vorzeichen von v_S und v_E wird dabei in Richtung der Schallwelle (d.h. vom Sender zum Empfänger) als positiv und in Gegenrichtung als negativ genommen.

Schallfeldgrößen (siehe auch Wellen)

$$\omega t - k x$$

Auslenkung $y[x, t] = \hat{y} \text{Sin}\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right] = \hat{y} \text{Sin}\left[\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right] = \hat{y} \text{Sin}[\omega t - k x]$
maximal \hat{y}

Schallschnelle $v[x, t] = \frac{\partial y}{\partial t}[x, t] = \hat{y} \omega \text{Cos}[\omega t - k x] = \hat{v} \text{Cos}[\omega t - k x]$
maximal $\hat{v} = \hat{y} \omega$

Beschleunigung $a[x, t] = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}[x, t] = -\hat{y} \omega^2 \text{Sin}[\omega t - k x] = -\hat{a} \text{Sin}[\omega t - k x]$
maximal $\hat{a} = \hat{v} \omega = \hat{y} \omega^2$

Effektivwert \hat{v} Definition $\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v[t]^2 dt}$ bei Sinus Schwingung $\frac{\hat{v}}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{y}\omega}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \pi f \hat{y}$

Wenn an Stelle der orts- und zeitabhängigen Schwingungsgröße der Schalldruck gewählt wird, folgt ...

Schalldruck $p[x, t] = \omega \rho c \hat{y} \cos[\omega t - kx] = \hat{p} \cos[\omega t - kx]$
 Druck und Auslenkung sind um 90° versetzt (d.h. Sinus → Cosinus)
 Der Schalldruck ist dem vorhandenen Gasdruck überlagert.

maximal $\hat{p} = \omega \rho c \hat{y} = \rho c \hat{v}$

Effektivwert $\bar{p} = \frac{\hat{p}}{\sqrt{2}} = \frac{\rho c \hat{v}}{\sqrt{2}}$

Schallintensität J ist gleich Schalleistung pro Fläche ($[J] = \frac{W}{m^2}$) ...

$$J = \frac{\rho c \hat{v}^2}{2} = \rho c \bar{v}^2 \quad \text{mit } \hat{p} = \rho c \hat{v} \quad \rightarrow \quad J = \frac{\hat{p}^2}{2 \rho c} = \frac{\bar{p}^2}{\rho c} = \bar{p} \bar{v}$$

Schallpegel

Schallintensitätspegel L_J $L_J = 10 \log_{10} \left[\frac{J}{J_0} \right] \text{ dB}$ mit $J_0 = 1 \frac{\text{pW}}{\text{m}^2}$ (für normale Luft, $\rho c = 400 \frac{\text{Pa} \cdot \text{s}}{\text{m}}$)

Schalldruckpegel L_p $L_p = 20 \log_{10} \left[\frac{\bar{p}}{p_0} \right] \text{ dB}$ mit $p_0 = 20 \mu\text{Pa}$ (gesetzlich so festgelegt)

Als relativen Schallpegel bezeichnet man die Differenz zweier absoluter Schallpegel ...

$$\Delta L = L_1 - L_2 = 10 \log_{10} \left[\frac{J_1}{J_2} \right] \text{ dB}$$

Mehrere Quellen: $L_J = 10 \log_{10} \left[\frac{J_1 + J_2 + \dots}{J_0} \right] \text{ dB}$ $L_p = 20 \log_{10} \left[\frac{\sqrt{\bar{p}_1^2 + \bar{p}_2^2 + \dots}}{p_0} \right] \text{ dB}$

Lautstärkepegel

Lautstärkepegel L_N Einheit phon

Für 1000 Hz gilt: Schalldruckpegel in dB gleich Lautstärkepegel in phon.

Für alle andern Frequenzen ermöglicht das Diagramm mit den Kurven gleicher Lautstärke die Umwandlung zwischen objektiv vorhandenem Schalldruckpegel L_p und dem subjektiv empfundenen Lautstärkepegel L_N .

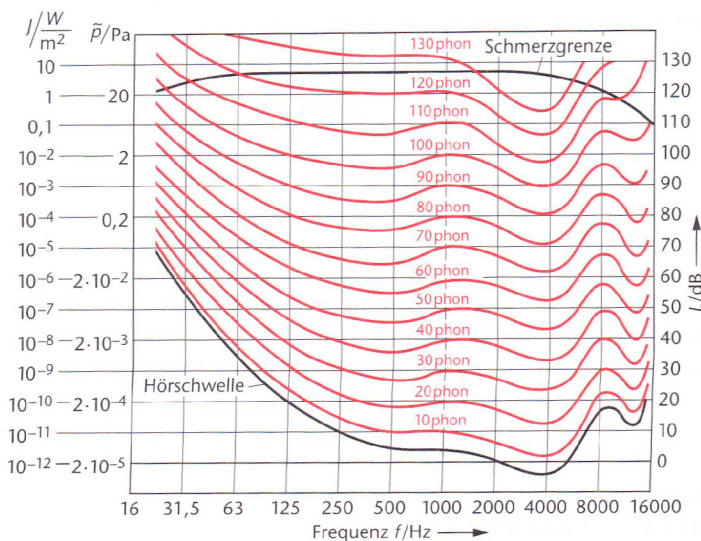


Abbildung Kurven gleicher Lautstärke (Quelle Horst Kuchling, Taschenbuch der Physik)

Licht als Strahl (Geometrische Optik)

Ein **Lichtstrahl** ist ein sehr feines Lichtbündel, das sich in einem homogenen Material geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit ausbreitet. An einem Übergang zu einem anderen Material wird der Strahl reflektiert und gebrochen. Der Lichtweg ist umkehrbar.

Reflexions- und Brechungsgesetz

Wenn ein Strahl in einem Material 1 propagiert und auf eine ebene Oberfläche trifft, wird er sowohl reflektiert als auch gebrochen. Der reflektierte und der gebrochene Strahl verlaufen in der Ebene, die durch den einfallenden Strahl und das Lot zur reflektierenden Fläche gegeben ist. Die Winkel werden vom Lot zum Strahl hin gemessen. Es gilt ...

Reflexionsgesetz $\alpha_r = \alpha_1$

“Einfallswinkel gleich Reflexionswinkel”

Brechungsgesetz $n_1 \sin[\alpha_1] = n_2 \sin[\alpha_2]$

$$\frac{\sin[\alpha_1]}{c_1} = \frac{\sin[\alpha_2]}{c_2}$$

Gesetz von Snellius

α_1	Winkel des einfallenden Strahls
α_r	Winkel des reflektierten Strahls (Reflexionswinkel, Ausfallswinkel)
α_2	Winkel des gebrochenen Strahls
c_1, c_2	Lichtgeschwindigkeit im entsprechenden Material
n_1, n_2	Brechzahl des Materials 1 bzw. 2
	n_1 ist optisch dünner als $n_2 \Leftrightarrow n_1 < n_2$ und $c_1 > c_2$
	n_1 ist optisch dichter als $n_2 \Leftrightarrow n_1 > n_2$ und $c_1 < c_2$

→ Licht wird beim Übergang vom optisch dünneren Material zum optisch dichteren Material zum Lot hin gebrochen.

Die **Brechzahl** n_1 eines Materials gibt das Verhältnis der Vakuum Lichtgeschwindigkeit zur Lichtgeschwindigkeit im entsprechenden Material an.

$$n_1 = \frac{c_V}{c_1}$$

Brechzahl (refractive index) des Materials 1

$$c_V = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Vakuumlichtgeschwindigkeit (exakt)

Abbildung, Brennweite und Brechwerte

Ein parallel zur optischen Achse einfallender Strahl (**Parallelstrahl**) wird durch eine Linse oder einen gekrümmten Spiegel abgelenkt und läuft anschliessend (virtuell oder reell) durch den Brennpunkt bzw. Fokus (**Brennpunktstrahl**). Den Abstand des Brennpunkts vom Scheitelpunkt des gekrümmten Spiegels bzw. der (dünnen) Linse nennt man **Brennweite**. Den Kehrwert der Brennweite f nennt man **Brechwert D**.

$$f$$

Brennweite; $[f] = \text{m}$

$$D = \frac{1}{f} \quad \text{allgemeiner } \frac{n}{f}$$

Brechwert oder Brechkraft; $[D] = \frac{1}{\text{m}} = \text{Dioptrie (dpt)}$

Zur Bildkonstruktion verwendet man (am einfachsten) mindestens 2 der folgenden 3 speziellen Strahlen ...

- einfallender Parallelstrahl wird (nach der Linse oder dem Spiegel) zum Brennpunktstrahl,
- einfallender Brennpunktstrahl wird (nach der Linse oder dem Spiegel) zum Parallelstrahl,
- einfallender Mittelpunktstrahl geht gerade durch (Linse) bzw. wird in sich selbst reflektiert (Spiegel).

Ein Gegenstand im Abstand g von einer Linse mit der Brennweite f wird in das (virtuelle oder reelle) Bild im Abstand b von der Linse abgebildet.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

Abbildungsgleichung

$$\beta = \frac{b}{g} = \frac{B}{G}$$

Abbildungsmassstab β (Vergrößerung oder Verkleinerung)

Brennweite f , Gegenstandsweite g , Bildweite b , Gegenstandsgrösse G , Bildgrösse B
 $f < 0$ für eine Konkavlinse (in der Mitte dünner als am Rand)
 $b < 0$ für ein virtuelles Bild

Beispiele für Brennweiten

$$f = \frac{r}{2}$$

sphärischer (kugelförmiger) **Hohlspiegel** mit dem Radius r

$$f = -\frac{r}{2}$$

sphärischer (kugelförmiger) **Wölbspiegel** mit dem Radius r

$$D = \left(\frac{n_{\text{Linse}}}{n_{\text{Luft}}} - 1 \right) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

dünne Linse in Luft

r_1, r_2 sind die Krümmungsradien der linken bzw. rechten Oberfläche; r_1, r_2 sind beide positiv für eine Bikonvexlinse;

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

System zweier dünner Linsen im Abstand d (falls $d \ll f_1, f_2$)

Licht als Welle (Wellenoptik)

Zur Erklärung bestimmter Experimente eignet sich die Beschreibung des Lichts als Welle am besten.

Es gilt (wie bei allen Wellen) die Beziehung $c = \lambda f$. Daraus folgt ...

$$c_V = \lambda_V f$$

im Vakuum

$$c_M = \lambda_M f$$

in einem Material

λ_V, λ_M

Wellenlänge des Lichts im Vakuum bzw. im Material

c_V, c_M

Geschwindigkeit des Lichts im Vakuum bzw. im Material

f

Frequenz des Lichts; bestimmt die Farbe des Lichts.

$$\lambda_M = \frac{\lambda_V}{n_M}$$

da $n_M = \frac{c_V}{c_M}$ n_M ist die Brechzahl des Materials

Interferenz

Bei Überlagerung von zwei Lichtwellen müssen die Phasenunterschiede $\Delta\varphi_{\text{Weg}}$ auf Grund der unterschiedlich langen Wege Δs und eventuelle Phasensprünge $\Delta\varphi_{\text{Übergang}}$ an einem Übergang berücksichtigt werden.

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_{\text{Übergang}} + \Delta\varphi_{\text{Weg}}$$

mit maximaler Verstärkung, falls $\Delta\varphi = i 2\pi$

mit maximaler Auslöschung, falls $\Delta\varphi = \left(i + \frac{1}{2}\right) 2\pi$

Bei Transmission bzw. Reflexion erleidet die Welle die folgenden Phasensprünge:

$$\Delta\varphi_{\text{Übergang}} = 0$$

bei Transmission

$$\Delta\varphi_{\text{Übergang}} = 0$$

bei Reflexion an einem optisch dünneren Material

$$\Delta\varphi_{\text{Übergang}} = \pi$$

bei Reflexion an einem optisch dichteren Material

Der unterschiedlich lange Weg führt auf eine Phasendifferenz von ...

$$\Delta\varphi_{\text{Weg}} = k * \Delta s = 2\pi \left(\frac{\Delta s}{\lambda_M} \right) = 2\pi \left(\frac{\Delta s * n_M}{\lambda_V} \right)$$

$$\Delta s * n_M$$

heisst "optischer Weg" oder "optische Weglänge"

Beugung am engen Einzelspalt

$$\text{Sin}[\alpha_j] = \pm \left(i + \frac{1}{2} \right) * \frac{\lambda}{b}$$

Nebenmaxima; ausserdem gibt es ein Hauptmaximum bei $\alpha = 0^\circ$

$$\text{Sin}[\alpha_j] = \pm i * \frac{\lambda}{b}$$

Minima

λ ist die verwendete Wellenlänge

b ist die Breite des Spalts

$i \in \{1, 2, 3, \dots\}$

Beugung am Doppelspalt oder Gitter

$$\text{Sin}[\alpha_j] = \pm i * \frac{\lambda}{g}$$

Maxima

$$\text{Sin}[\alpha_j] = \pm \left(i + \frac{1}{2} \right) * \frac{\lambda}{g}$$

Minima

g ist der Abstand zwischen zwei Spaltenmitten

$i \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Lichtstrahlung

Definition der SI Basiseinheit Candela:

Eine **Candela** ist die Lichtstärke / einer Strahlungsquelle, die in einer bestimmten Richtung monochromatisches Licht der Frequenz 540 THz (entspricht der Vakuumwellenlänge 555 nm) mit der Strahlstärke $\frac{1}{683} \frac{\text{Watt}}{\text{Steradian}}$ aussendet.

Strahlungsphysikalische	Einheit	Lichttechnische	Einheit	Richtung
Strahlungsenergie W, Q_e	J	Lichtmenge Q	lm * s	
Strahlungsfluss Φ_e	W	Lichtstrom Φ	lm	
Bestrahlung H_e	J/m ²	Belichtung H	lx * s	einstrahlend
Bestrahlungsstärke E_e	W/m ²	Beleuchtungsstärke E	lx = lm/m ²	einstrahlend
Strahlstärke I_e	W/sr	Lichtstärke I	cd = lm/sr	ausstrahlend
spez. Ausstrahlung M_e	W/m ²	spez. Lichtausstrahlung M	lm/m ² = lx	ausstrahlend
Strahldichte L_e	W/(sr m ²)	Leuchtdichte L	cd/m ²	ausstrahlend

Tabelle Strahlungsphysikalische und Lichttechnische Grössen
(Quelle Horst Kuchling, Taschenbuch der Physik)

Beziehungen

$$\Phi = \frac{Q}{t} \quad E = \frac{\Phi}{A} \quad H = E * t = \frac{\Phi * t}{A} = \frac{Q}{A} \quad I = \frac{\Phi}{\Omega} \quad M = \frac{\Phi}{A} \quad L = \frac{I}{A} = \frac{\Phi}{\Omega * A}$$

Es gelten die folgenden Beziehungen zwischen der physiologischen Grösse Lichtstrom Φ (Einheit Lumen) und dem physikalischen Strahlungsfluss Φ_e (Einheit Watt).

$$\frac{\Phi}{\Phi_e} = K[\lambda] = K_m * V[\lambda]$$

für das **Tagesehen** mit den Zapfen.

$K[\lambda]$ fotometrisches Strahlungsäquivalent

K_m $K_m = 683 \text{ lm/W}$

$V[\lambda]$ tabellierter spektraler Hellempfindlichkeitsgrad
das Maximum liegt bei 555 nm (siehe unten)

$$\frac{\Phi}{\Phi_e} = K'[\lambda] = K'_m * V'[\lambda]$$

für das **Nachtsehen** mit den Stäbchen.

K'_m $K'_m = 1699 \text{ lm/W}$

$V'[\lambda]$ tabellierter spektraler Hellempfindlichkeitsgrad
das Maximum liegt bei 507 nm

Spektraler Hellempfindlichkeitsgrad $V(\lambda)$ (Tagesehen)					
λ nm	$V(\lambda)$	$V(\lambda) \cdot K_m$ lm/W	λ nm	$V(\lambda)$	$V(\lambda) \cdot K_m$ lm/W
380	0,000 039	0,026 6	580	0,870	594
390	0,000 12	0,082	590	0,757	517
400	0,000 40	0,270	600	0,631	431
410	0,001 21	0,826	610	0,503	344
420	0,004 00	2,73	620	0,381	260
430	0,011 60	7,92	630	0,265	181
440	0,023 0	15,7	640	0,175	120
450	0,038 0	26,0	650	0,107	73,1
460	0,060 0	41,0	660	0,061 0	41,7
470	0,091 0	62,1	670	0,032 0	21,9
480	0,139	94,9	680	0,017 0	11,6
490	0,208	142	690	0,008 21	5,61
500	0,323	221	700	0,004 10	2,80
510	0,503	344	710	0,002 10	1,43
520	0,710	485	720	0,001 05	0,715
530	0,862	589	730	0,000 520	0,355
540	0,954	652	740	0,000 249	0,170
550	0,995	679	750	0,000 120	0,082 0
555	1,000	683	760	0,000 060	0,041 0
560	0,995	680	770	0,000 030	0,020 5
570	0,952	650	780	0,000 015	0,010 2

Abbildung Spektraler Hellempfindlichkeitsgrad $V[\lambda]$ beim **Tagesehen**
(Quelle Horst Kuchling, Taschenbuch der Physik)

Licht als Teilchen

Es gibt experimentelle Situationen (z.B. Photoeffekt) bei denen sich das Licht am besten durch Teilchen (Photonen) beschreiben lässt.

$$E = h * f$$

E Energie des Photons; $[E] = \text{J}$

f Frequenz; $[f] = \text{s}^{-1}$

h Planck'sches Wirkungsquantum; $h = 1.05457168 * 10^{-34} \text{ J s}$

$$p = \frac{E}{c}$$

p Impuls des Photons; $[p] = \frac{\text{kg m}}{\text{s}}$

c Lichtgeschwindigkeit

Thermodynamik

Temperatur, Normbedingungen

Der Erstarrungspunkt und der Siedepunkt von Wasser (jeweils bei $p = 1013.25 \text{ hPa}$) dienen als Eichpunkte für die Celsius ($^{\circ}\text{C}$), Kelvin (K) und Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$) Skala.

Erstarrungspunkt von Wasser	0°C	273.15 K	32°F
Siedepunkt von Wasser	100°C	373.15 K	212°F

Man verwendet die Bezeichnungen ...

t, ϑ	Celstempertur, $[t] = ^{\circ}\text{C}$	
T	Kelvtempertur, $[T] = \text{K}$	es gilt: $T_0 = T - t$

Viele Eigenschaften von Gasen werden für Normbedingungen angegeben, d.h. für ...

$T_0 = 0^{\circ}\text{C} = 273.15 \text{ K}$	Normtempertur
$p_0 = 1013.25 \text{ hPa}$	Normdruck

Ausdehnung durch Temperturerhöhung

Im Folgenden gilt jeweils ...

l_1, A_1, V_1	Länge l eines Stabes, Fläche A einer Platte, Volumen V eines Körpers bei der Tempertur T_1
l_2, A_2, V_2	analog für die Tempertur T_2
$\Delta l, \Delta A, \Delta V$	die Differenzen $\Delta l = l_2 - l_1$, $\Delta A = A_2 - A_1$, $\Delta V = V_2 - V_1$
$\Delta T = T_2 - T_1$	Temperturdifferenz

Festkörper und Längenausdehnungskoeffizient α

Es gilt für die Temperturabhängigkeit der Länge, der Fläche und des Volumens eines Festkörpers ...

Längenänderung	$l_2 = l_1 + \alpha l_1 \Delta T = l_1(1 + \alpha \Delta T)$	bzw.	$\Delta l = \alpha \cdot l_1 \cdot \Delta T$
Flächenänderung	$A_2 = A_1 + 2 \alpha A_1 \Delta T = A_1(1 + 2 \alpha \Delta T)$	bzw.	$\Delta A = 2 \alpha A_1 \Delta T$
Volumenänderung	$V_2 = V_1 + 3 \alpha V_1 \Delta T = V_1(1 + 3 \alpha \Delta T)$	bzw.	$\Delta V = 3 \alpha V_1 \Delta T$
α ist der Längenausdehnungskoeffizient	mit $[\alpha] = \frac{1}{\text{K}}$		

Flüssigkeit und Volumenausdehnungskoeffizient γ

Es gilt für die Temperturabhängigkeit des Volumens einer Flüssigkeit ...

Volumenänderung	$V_2 = V_1 + \gamma V_1 \Delta T = V_1(1 + \gamma \Delta T)$		
bzw.	$\Delta V = \gamma V_1 \Delta T$	bzw.	$\frac{V_2}{V_1} = 1 + \gamma \Delta T = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$
γ ist der Volumenausdehnungskoeffizient	mit $[\gamma] = \frac{1}{\text{K}}$		

Gas und Volumenausdehnungskoeffizienten γ

Es gilt für die Temperturabhängigkeit des Volumens einer Flüssigkeit **bei konstantem Druck** ...

Volumenänderung	$V_2 = V_1 + \gamma V_1 \Delta T$ (siehe Flüssigkeit)
γ ist der Volumenausdehnungskoeffizient	mit $[\gamma] = \frac{1}{\text{K}}$

Für ein ideales Gas gilt ...

$$\gamma = \frac{1}{273.15 \text{ K}} \approx 0.00366 \frac{1}{\text{K}}$$

Temperaturerhöhung durch Wärmezufuhr

Durch Zufuhr von Wärme kann die Temperatur eines Festkörpers, einer Flüssigkeit und eines Gases erhöht werden.

Es gilt für Festkörper und Flüssigkeiten ...

$$Q = c m \Delta T$$

Q zugeführte Wärmemenge; $[Q] = \text{J}$

ΔT Temperaturerhöhung $\Delta T = T_2 - T_1$; $[\Delta T] = \text{K}$

m Masse; $[m] = \text{kg}$

c **spezifische Wärmekapazität**; $[c] = \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$

Man verwendet weiters die folgenden zwei Definitionen ...

$$Q = C \Delta T$$

C **Wärmekapazität**; $[C] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$

$$Q_i = c m t = c m (T - T_0) \quad Q_i \text{ **Wärmeinhalt**; } [Q_i] = \text{J}$$

d.h. die auf 0°C bezogene Wärmemenge.

Bei Gasen hängt der Zusammenhang zwischen zugeführter Wärmemenge Q und Temperaturerhöhung ΔT vom Prozess ab. Es gilt ...

$$Q = c_V m \Delta T$$

bei konstantem Volumen V

c_V spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen; $[c_V] = \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$

$$Q = c_p m \Delta T$$

bei konstantem Druck p

c_p spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck; $[c_p] = \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$

Es gelten die folgenden Beziehungen ...

$$c_p - c_V = R_j$$

R_j spezielle Gaskonstante; $[R_j] = \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$

$$\frac{c_p}{c_V} = \gamma$$

γ $[\gamma] = 1$, für ein ideales Gas ist $\gamma = \frac{5}{3}$ und gleich dem

Adiabatexponenten κ .

Beim Mischen von mehreren Körpern gilt die Energieerhaltung, d.h. die von den Körpern höherer Temperatur abgegebene Wärmemenge wird von den Körpern tieferer Temperatur aufgenommen.

$$|Q_1^{\text{zu}}| + |Q_2^{\text{zu}}| + \dots = |Q_1^{\text{ab}}| + |Q_2^{\text{ab}}| + \dots \quad \text{bzw.}$$

$$Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = 0$$

wobei die zugeführte Wärme positiv und die abgeführte Wärme negativ gerechnet wird.

Für die Wärmeinhalte Q_i gilt ...

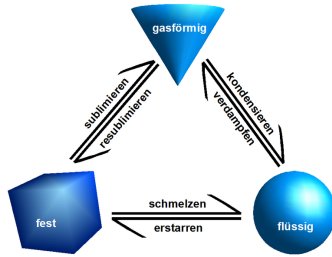
$$\sum_{k=1}^n Q_{i,k}^{\text{vorher}} = \sum_{k=1}^n Q_{i,k}^{\text{nachher}}$$

Summe der Wärmeinhalte vorher = Summe der Wärmeinhalte nachher

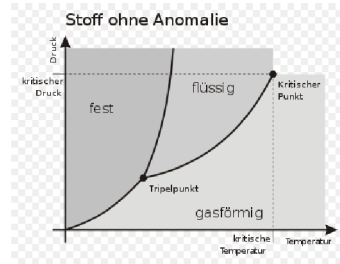
Es müssen eventuell auftretende Aggregatzustandsänderungen (Schmelzwärme ...) berücksichtigt werden.

Aggregatzustandsänderung durch Wärmezufuhr

Durch Zufuhr bzw. Entzug von Wärme kann der Aggregatzustand eines Festkörpers, einer Flüssigkeit und eines Gases geändert werden (<http://de.wikipedia.org/wiki/Aggregatzustand>).



Aggregatzustandsänderung



Phasendiagramm

Wichtige Begriffe (siehe entsprechende Tabellen) ...

Schmelzkurve (druckabhängig), Schmelzpunkt = Erstarrungspunkt,

Schmelzwärme $Q_{sm} = \text{Erstarrungswärme}$

spezifische Schmelzwärme s , $[s] = \text{J/kg}$

$$Q_{sm} = m s$$

Siedepunktkurve (druckabhängig), Siedepunkt = Kondensationspunkt,

Verdampfungswärme $Q_{sd} = \text{Kondensationswärme}$

spezifische Verdampfungswärme r , $[r] = \text{J/kg}$

$$Q_{sd} = m r$$

Sublimationskurve (druckabhängig), Sublimationswärme = Resublimationswärme

Dampfdruckkurve (druckabhängig)

= Sublimationskurve plus Siedepunktkurve (Übergang zur Gasphase)

Tripelpunkt Im Tripelpunkt (T_T, p_T) kommen alle drei Phasen gleichzeitig vor.

Kritischer Punkt Nur unterhalb der kritischen Temperatur lassen sich Gase verflüssigen.

Energieformen

Verbrennungsenergie

Unter dem spezifischen Heizwert H versteht man das Verhältnis der bei der Verbrennung frei werdenden Wärmemenge zur Masse des verbrannten festen oder flüssigen Brennstoffes.

$$Q = H m$$

Q frei werdende Wärmemenge; $[Q] = \text{J}$

H spezifischer Heizwert fester oder flüssiger Stoffe; $[H] = \frac{\text{J}}{\text{kg}}$

m Masse; $[m] = \text{kg}$

$$Q = H' V_n$$

V_n Normvolumen

H' spezifischer Heizwert gasförmiger Stoffe; $[H'] = \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$

Sonnenenergie

Die auf die Erdoberfläche ausserhalb der Atmosphäre und senkrecht pro m^2 auftreffende Leistung der Sonnenstrahlung nennt man **Solarkonstante** und sie beträgt ...

$$\text{Solarkonstante} = 1.37 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$$

Elektrische Energie

In einem stromdurchflossenen Leiter mit dem Ohm'schen Widerstand R entsteht Wärme Q gemäss folgender Beziehung ...

$$Q = U I t = I^2 R t = \frac{U^2 t}{R}$$

Q frei werdende Wärmemenge; $[Q] = \text{J}$

I Stromstärke; $[I] = \text{A}$

U Spannung; $[U] = \text{V}$

R Ohm'scher Widerstand; $[R] = \Omega$

t Zeit; $[t] = \text{s}$

Mechanische Energie

Mechanische Energie kann restlos in Wärme umgewandelt werden.

$$Q = \Delta E_{\text{kin}} + \Delta E_{\text{pot}}$$

Q frei werdende Wärmemenge; $[Q] = \text{J}$

ΔE_{kin} Abnahme der kinetischen Energie; $[\Delta E_{\text{kin}}] = \text{J}$

ΔE_{pot} Abnahme der potentiellen Energie; $[\Delta E_{\text{pot}}] = \text{J}$

Luftfeuchtigkeit

Als **absolute Feuchte** f bezeichnet man die je m^3 feuchter Luft enthaltene Wasserdampfmasse m

Unter der **maximalen Feuchte** f_{max} (bzw. Sättigungsmenge) versteht man die maximal mögliche Wasserdampfmenge (-masse), die bei einer bestimmten Temperatur je m^3 Luft enthalten sein kann.

Die relative Feuchte φ ist das Verhältnis der tatsächlich enthaltenen zur maximal möglichen Wasserdampfmasse in der Luft ...

$$\varphi = \frac{f}{f_{\text{max}}}$$

Für die Einheiten gilt: $[f] = [f_{\text{max}}] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ oder $\frac{\text{g}}{\text{m}^3}$ $[\varphi] = 1$: d.h. eine reine Zahl, Verhältnis, %

Zustandsgleichung des Idealen Gases

Ein ideales Gas kann bei gleichbleibender Anzahl Teilchen N (bzw. Masse m bzw. Anzahl Mol n) durch folgende Gleichungen beschrieben werden ...

$$\frac{pV}{T} = nR = mR_j = nMR_j = Nk = \text{konstant}$$

p Druck; $[p] = \text{Pa}$ (Pascal)

V Volumen; $[V] = \text{m}^3$

T Temperatur; $[T] = \text{K}$ (Kelvin)

n Anzahl Mol; $[n] = \text{mol}$ (Mol)

R universelle Gaskonstante: $R = 8.314472 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$

R_j spezielle Gaskonstante; $[R_j] = \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$; tabelliert

M molare Masse; $[M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$

N Anzahl Teilchen; $[N] = 1$

k Boltzmann Konstante: $k = 1.3806503 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$

Wenn jeweils eine der drei Grössen (p, V, T) konstant gehalten wird, gilt bei einem thermodynamischen Prozess der den Zustand 1 (p_1, V_1, T_1) in den Zustand 2 (p_2, V_2, T_2) überführt ...

Prozess	konstant	gleichbleibend	Name des Gesetzes
isochor ($V_1 = V_2$)	$\frac{p}{T}$	$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$	Amonton
isobar ($p_1 = p_2$)	$\frac{V}{T}$	$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$	Gay – Lussac
isotherm ($T_1 = T_2$)	$p \cdot V$	$p_1 V_1 = p_2 V_2$	Boyle – Mariotte

1. Hauptsatz der Thermodynamik

Der Energieerhaltungssatz angewendet auf die Thermodynamik liefert ...

$\Delta U = Q + W$	ΔU Erhöhung der inneren Energie $\Delta U = U_2 - U_1$; $[\Delta U] = J$
	Q zugeführte Wärmemenge; $[Q] = J$
	W am System geleistete Arbeit; $[W] = J$

Es gilt ausserdem ...

$W = -\int p dV$	Volumenänderungsarbeit
$U = c_V m T$	innere Energie (des idealen Gases)

Für die verschiedenen thermodynamischen Prozesse folgt ...

	isochor	isobar	isotherm	adiabatisch
Bedingung	$V_1 = V_2$	$p_1 = p_2$	$T_1 = T_2$	$S_1 = S_2$
Beziehung	$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$	$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$	$p_1 V_1 = p_2 V_2$	$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa$ $p_1^{1-\kappa} T_1^\kappa = p_2^{1-\kappa} T_2^\kappa$ $T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1}$
1. Hauptsatz	$\Delta U = Q$	$\Delta U = Q + W$	$0 = Q + W$	$\Delta U = W$
Q	ΔU	$c_p m \Delta T$	$-W$	0
W	0	$-p \Delta V$ bzw. $-m R_i \Delta T$	$p V \ln \left[\frac{V_1}{V_2} \right]$	$\frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{\kappa - 1} = \frac{m R_i \Delta T}{\kappa - 1}$
ΔU	$c_V m \Delta T$	$c_V m \Delta T$	0	$c_V m \Delta T = \frac{m R_i}{\kappa - 1} \Delta T$
ΔS	$c_V m \ln \left[\frac{T_2}{T_1} \right]$	$c_p m \ln \left[\frac{T_2}{T_1} \right]$	$m R_i \ln \left[\frac{p_1}{p_2} \right]$	0

Ausserdem gilt immer auch die Zustandsgleichung des idealen Gases: $p V = m R_i T$. Mit dieser Beziehung können obige Beziehungen teilweise umgeformt werden.

Beispielsweise gilt für den isothermen Prozess nicht nur $W = p V \ln \left[\frac{V_1}{V_2} \right]$, sondern auch $W = p V \ln \left[\frac{p_2}{p_1} \right]$,

da für diesen Prozess $p_1 V_1 = p_2 V_2$ gilt und somit auch $\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2}{p_1}$.

Kreisprozesse und Entropie

Die Entropie ist eine Zustandsgrösse und ändert sich bei einem reversiblen Prozess gemäss ...

$$\boxed{dS = \frac{dQ_{\text{rev}}}{T}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ_{\text{rev}}}{T}} \quad [S] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Zunehmende Entropie bedeutet für ein System den Übergang in einen Zustand grösserer Wahrscheinlichkeit. In der Natur kommen nur Prozesse vor, die neben dem 1. Hauptsatz (Energieerhaltung) auch den 2. Hauptsatz der Thermodynamik erfüllen. Es gibt verschiedene Formulierungen ...

- A) $\Delta S \geq 0$ Bei den in einem abgeschlossenen System ablaufenden Vorgängen kann die Entropie niemals abnehmen.
- B) Wärme kann nur dann in Arbeit umgewandelt werden, wenn zugleich ein Teil der Wärme von einem wärmeren auf einen kälteren Körper übergeht (Prinzip der Wärmekraftmaschine). Mit anderen Worten: es gibt kein Perpetuum mobile 2. Art.
- C) Wärme kann von einem kälteren auf einen wärmeren Körper nur unter Aufwand mechanischer Arbeit übertragen werden (Prinzip der Kältemaschine).

Der Carnot Prozess (isotherme Expansion, isentrope Expansion, isotherme Kompression, isentrope Kompression) besitzt von allen Wärmekraftmaschinen den grössten Wirkungsgrad. Er beträgt ..

$$\boxed{\eta = \frac{|W^{\text{zu}}|}{|Q^{\text{zu}}|} = \frac{|Q^{\text{zu}}| - |Q^{\text{ab}}|}{Q^{\text{zu}}} = \frac{Q^{\text{zu}} + Q^{\text{ab}}}{Q^{\text{zu}}} = \frac{T_{\text{wärmer}} - T_{\text{kälter}}}{T_{\text{wärmer}}} = 1 - \frac{T_{\text{kälter}}}{T_{\text{wärmer}}}}$$

Für die Entropieänderung eines idealen Gases gilt ...

$$\boxed{\Delta S = S_2 - S_1 = c_V m \ln\left[\frac{T_2}{T_1}\right] + m R_i \ln\left[\frac{V_2}{V_1}\right]}$$

Van-der-Waals'sche Zustandsgleichung

In der Nähe des Kondensationspunktes weichen die Eigenschaften realer Gase erheblich von den Eigenschaften idealer Gase ab. Deren Verhalten wird besser durch die **Van-der Waal'sche Zustandsgleichung** beschrieben ...

$$\boxed{\left(p + \frac{a n^2}{V^2}\right)(V - b n) = n R T}$$

- mit p, V, T, n, T wie üblich
- a Van-der-Waals Konstante; $[a] = \text{N m}^4 / \text{mol}^2$
 - b Van-der-Waals Konstante; $[b] = \text{m}^3 / \text{mol}$

Die kritischen Werte des Drucks, des Volumens und der Temperatur sind gegeben durch ...

$$T_{\text{kr}} = \frac{8a}{27bR} \quad p_{\text{kr}} = \frac{a}{27b^2} \quad V_{\text{kr}} = 3nb$$

Kinetische Wärmetheorie

Die **Loschmidt Konstante** n_0 gibt die Anzahl Moleküle an, die bei Normbedingungen ($T_0 = 273.15 \text{ K}$, $p_0 = 1013.25 \text{ hPa}$) in einem Kubikmeter enthalten sind ...

$$n_0 = 2.68678 \cdot 10^{25} \frac{\text{Teilchen}}{\text{m}^3}$$

bei Normbedingungen

$$\text{denn: } pV = NkT \quad \rightarrow \quad \frac{\text{Anzahl Teilchen}}{\text{Volumen}} = \frac{N}{V} = \frac{p}{kT} \quad \rightarrow \quad n_0 = \frac{p_0}{kT_0}$$

Die **Avogadro Konstante** N_A gibt die Anzahl Moleküle an die (bei jedem Stoff) in einem Mol enthalten sind.

$$N_A = 6.02214 \cdot 10^{23} \frac{\text{Teilchen}}{\text{mol}}$$

$$\text{denn: } pV = nRT = NkT \quad \rightarrow \quad \frac{\text{Anzahl Teilchen}}{\text{Mol}} = \frac{N}{n} = \frac{R}{k} = N_A$$

n Anzahl Mol

N Anzahl Teilchen

k Boltzmann Konstante: $k = 1.3806503 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$

R universelle Gaskonstante: $R = 8.314472 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$

Für die Masse eines Moleküls m_M gelten folgende Beziehungen ...

$$m = Mn = Nm_M = nN_A m_M$$

M Molare Masse, $[M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$

Die Stösse von Molekülen gegen eine Wand erzeugen den makroskopisch beobachtbaren Druck gemäss ...

$$p = \frac{1}{3} \rho \overline{v^2}$$

p (Druck), ρ (Dichte), $\overline{v^2}$ (mittlere quadratische Geschwindigkeit)

Die Verteilung der Geschwindigkeit der Moleküle ist gegeben durch die Maxwell Verteilung ...

$$\frac{dN}{N} = \frac{4v^2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2R_j T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{v^2}{2R_j T}} dv$$

$\frac{dN}{N}, v, dv$ Relative Anzahl $\frac{dN}{N}$ der Moleküle mit einer Geschwindigkeit v
im Intervall $[v, v + dv]$

R_j spezifische Gaskonstante (tabelliert)

T Absolute Temperatur (in Kelvin)

Für die wahrscheinlichste (\hat{v}), die mittlere (\bar{v}) und die mittlere quadratische ($\sqrt{\overline{v^2}}$) Geschwindigkeit ergibt sich aus dieser Verteilung ...

$$\hat{v} = \sqrt{2R_j T}$$

<

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8}{\pi} R_j T}$$

<

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{3R_j T}$$

Daraus folgt für die mittlere kinetische Energie (für ein 1-atomiges Teilchen) ...

$$\overline{E_{\text{kin}}} = \frac{1}{2} m_M \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT$$

mit k (Boltzmann Konstante), T (absolute Temperatur), m_M (Molekülmasse)

Äquipartitionsprinzip: Die Energie eines Moleküls verteilt sich gleichmässig auf alle Freiheitsgrade. Auf jeden Freiheitsgrad entfällt im Mittel die gleiche Energie $E = 1/2 kT$.

Bei mehratomigen Gasteilchen, Flüssigkeiten und Festkörpern ergibt sich die gesamte innere Energie U zu ...

$$U = \frac{f}{2} kT$$

mit Anzahl der Freiheitsgrad f , Boltzmannkonstante k , Temperatur T

Die Moleküle stossen laufend zusammen. Die Anzahl der Stösse pro Zeit \bar{z} (mittlere Stosszahl) sowie die mittlere freie Weglänge (\bar{l}) sind gegeben durch ...

$$\bar{z} = \pi \sqrt{2} d^2 \bar{v} \frac{N}{V} = \pi \sqrt{2} d^2 \bar{v} \frac{N_A \rho}{M} = \pi \sqrt{2} d^2 \bar{v} \frac{\rho}{kT}$$

$$\bar{l} = \frac{1}{\pi \sqrt{2} d^2} \frac{V}{N} = \frac{1}{\pi \sqrt{2} d^2} \frac{M}{N_A \rho} = \frac{1}{\pi \sqrt{2} d^2} \frac{kT}{\rho}$$

N, V	Anzahl Moleküle N im Volumen V
T, ρ	Temperatur T und Druck p des Gases
d	Durchmesser d der Moleküle
ρ	Dichte ρ des Gases
N_A	Avogadro Konstante, $[N_A] = \frac{\text{Teilchen}}{\text{mol}}$
M	Molare Masse, $[M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$

Wärmeleitung und Wärmedurchgang

Wärmeleitung innerhalb eines Körpers

$$\Phi = \frac{Q}{t} = \lambda \frac{A \Delta T}{l}$$

Wärmestrom, Wärmeleistung

Q	die in der Zeit t transportierte Wärmemenge (Energie)
A	Querschnittsfläche des Leiters
ΔT	Temperaturdifferenz zwischen beiden Leiterenden
l	Länge des Leiters
λ	Wärmeleitfähigkeit ; $[\lambda] = \frac{\text{W}}{\text{m K}}$

Wärmeübergang zwischen zwei Grenzflächen

$$\Phi = \frac{Q}{t} = \alpha A \Delta T$$

Wärmestrom, Wärmeleistung

α	Wärmeübergangskoeffizient ; $[\alpha] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$
----------	--

Wärmedurchgang bei mehreren Leitern und Grenzflächen

$$\Phi = \frac{Q}{t} = k A \Delta T$$

Wärmestrom, Wärmeleistung

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{l_1}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots$$

Wärmestrom, Wärmeleistung

k	k-Wert ; $[k] = [\alpha] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$
-----	---

Wärmestrahlung

Die von einem Körper auf Grund seiner Temperatur ausgehende Strahlungsleistung (in Watt) beträgt ...

$$P = \sigma \epsilon T^4 A$$

Stefan-Boltzmann'sches Gesetz

- P abgestrahlte Leistung
 ϵ Emissionsgrad; $\epsilon = 1$ für einen schwarzen Körper
 σ Stefan-Boltzmann Konstante; $\sigma = 5.6704 * 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$
A Fläche des Strahlers

Die Strahlungsleistung eines schwarzen Körpers verteilt sich auf die verschiedenen Wellenlängen λ gemäss ...

$$\frac{dP[\lambda]}{d\lambda} = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} * \frac{A}{e^{\frac{hc}{\lambda k T}} - 1}$$

Strahlungsgesetz von Planck

- h Planck'sche Konstante; $h = 6.6260693 * 10^{-34} \text{ J s}$
c Lichtgeschwindigkeit in Vakuum
 λ Wellenlänge der abgestrahlten em. Strahlung
T absolute Temperatur des Strahlers
A Fläche des Strahlers

Diese Verteilungsfunktion hat ein Maximum bei der Wellenlänge λ_{max} :

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{b}{T}$$

Verschiebungsgesetz von Wien

- b Wien-Konstante; $b = 2.89777 * 10^{-3} \text{ m K}$

Stromkreis

Die kleinste elektrische Ladung besitzen die Elementarteilchen Elektron (negativ) und Proton (positiv). Sie beträgt ...

$$e = 1.602' \times 176' \times 634 * 10^{-19} \text{ C (exakt)} \quad e \quad \textbf{elektrische Elementarladung}$$

$$[e] = \text{Coulomb (C)} = \text{Amperesekunde (As)}$$

Somit gilt allgemein für die elektrische Ladung Q ...

$$Q = Ne = (N^+ - N^-)e \quad N \quad \text{Nettoladung der Elektronen (N}^-\text{), Protonen (N}^+\text{), Ionen (N}^\pm\text{), ...}$$

Die elektrische Stromstärke I gibt die Ladung Q an, die pro Zeiteinheit t einen bestimmten Querschnitt passiert ...

$$I \text{ konstant} \quad \boxed{I = \frac{Q}{t}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{Q = It}$$

$$I \text{ zeitabhängig} \quad \boxed{I = \frac{dQ[t]}{dt}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{Q = \int_{t_1}^{t_2} I[t] dt}$$

$$[Q] = \text{Amperesekunde (As)} = \textbf{Coulomb (C)}, \quad [I] = \text{A}$$

Die **elektrische Stromstärke** I ist eine Basisgrösse des Internationalen Einheitensystems und wird in Ampere (A) gemessen. Die Definition lautet ...

Ein **Ampere** ist die Stärke eines elektrischen Stromes, der durch zwei geradlinige parallele Leiter mit einem Abstand von einem Meter fliesst und der zwischen den Leitern je Meter Länge eine Kraft von $2 * 10^{-7} \text{ N}$ hervorruft. Diese Definition war gültig bis 19. Mai 2019.

Unter der **Spannung** U zwischen zwei Punkten eines Leiters versteht man das Verhältnis der in diesem Leiterteil umgesetzten Leistung P zu dem durch den Leiter fliessenden Strom I ...

$$\boxed{U = \frac{P}{I}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{P = UI} \quad [U] = \frac{\text{W}}{\text{A}} = \textbf{Volt (V)}, \quad [P] = \text{W}$$

Die für den Transport der Ladungsträger erforderliche Arbeit W beträgt in der Zeit t ...

$$\boxed{W = Pt = UIt}$$

Unter dem **elektrischen Widerstand** R eines Bauelements versteht man das Verhältnis der Spannung U zwischen den Enden des Bauelements zur Stärke I des Stroms durch das Bauelement.

$$R = \frac{U}{I} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{U = RI} \quad [R] = \frac{\text{V}}{\text{A}} = \textbf{Ohm (\Omega)}$$

speziell: R spannungsunabhängig / konstant \rightarrow **Ohm'sches Gesetz**

Für einen Leiter der Länge l und mit dem Querschnitt A gilt ...

$$\boxed{R = \frac{\rho l}{A}}$$

R elektrischer Widerstand, $[R] = \Omega$

ρ **spezifischer Widerstand** des Materials, $[\rho] = \Omega \text{ m}$

Manchmal werden auch die folgenden Grössen verwendet ...

$\chi = 1/\rho$, der Kehrwert von ρ : χ heisst elektrische **Leitfähigkeit**.
 $G = 1/R$, der Kehrwert von R : G heisst elektrischer **Leitwert**.

Der spezifische Widerstand ρ hängt von der Temperatur t (in °C) ab ...

$$\rho[t] = \rho_{20^\circ\text{C}} * (1 + \alpha (t - 20^\circ\text{C}))$$

α **Temperaturkoeffizient** des spez. Widerstands, $[\alpha] = 1/K$

$\rho_{20^\circ\text{C}}$ spezifischer Widerstand bei 20 °C

Kirchhoff'scher Maschensatz: In jedem geschlossenen Umlauf bzw. in jeder Masche eines verzweigten Netzwerks ist die Summe aller Spannungsabfälle gleich 0 (Vorzeichen beachten!).

Kirchhoff'scher Knotenpunktsatz: In jedem Verzweigungspunkt ist die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme.

Aus den beiden obigen Sätzen folgt (mithilfe des Ohm'schen Gesetzes) für den Gesamt- bzw. Ersatzwiderstand R von Widerständen R_j , ...

1) die in einer Reihe angebracht werden:

$$R_{\text{ersatz}} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

2) die parallel zueinander angebracht werden:

$$\frac{1}{R_{\text{ersatz}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

Elektrisches Feld

Unter der **elektrischen Feldstärke** E versteht man das Verhältnis der auf eine Ladung Q im elektrischen Feld wirkenden Kraft F zur Grösse dieser Ladung: $E = \frac{F}{Q}$

$$\vec{F} = Q * \vec{E}$$

$[F] = \text{N}$, $[Q] = \text{C}$, $[E] = \text{N/C} = \text{V/m}$

$$E = \frac{F}{Q}$$

Die elektrische Feldstärke E im Abstand r von einer Punktladung Q beträgt ...

$$E = \frac{1}{4 \pi \epsilon} \frac{Q}{r^2}$$

ϵ siehe unten

Aus den Gleichungen $F = Q_1 E$ und $E = \frac{1}{4 \pi \epsilon} \frac{Q_2}{r^2}$ folgt für die sogenannte Coulombkraft F_C auf ein Teilchen mit der Ladung Q_1 im elektrischen Feld E des Teilchens mit der Ladung Q_2 ...

$$F_C = \frac{1}{4 \pi \epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

F_C **Coulombkraft**

In jedem elektrischen Feld ist Energie E_F gespeichert. Sie entspricht der Arbeit, die zum Aufbau des Feldes (Trennung der Ladungen) aufzuwenden ist. Die Energiedichte w (Energie pro Volumeneinheit) an einer bestimmten Stelle beträgt ...

$$w = \frac{E_F}{V} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} E D$$

bzw. $E_F = w V$

w Energiedichte $[w] = \text{J/m}^3$

V Volumen $[V] = \text{m}^3$

ϵ Permittivität $[\epsilon] = \text{F/m}$

E, D elektrische Feldstärke E , elektrische Flussdichte D

Als elektrisches Potenzial φ_A eines Feldpunktes A bezeichnet man den Quotienten aus der Arbeit W die nötig ist, die positive Ladung Q von einem beliebigen Bezugspunkt 0 (mit dem Potenzial $\varphi_0 = 0 \text{ V}$) an die betreffende Feldstelle zu bringen, und der Ladung.

$$\varphi_A = - \int_0^A \vec{E} \cdot d\vec{s} = W/Q$$

Die **elektrische Spannung** U zwischen zwei Punkten A und B eines elektischen Feldes ist gegeben durch deren Potentialdifferenz ...

$$U = \varphi_B - \varphi_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = W/Q \quad [U] = V$$

Die elektrische Spannung zwischen A und B gibt uns somit an, wieviel Joule pro Coulomb aufzuwenden sind, um eine Ladung von A nach B zu bringen.

Bei konstantem elektrischem Feld gilt betragsmässig:

$$U = E s$$

$$E = \frac{U}{s}$$

Als **Flächenladungsdichte** σ bezeichnet man das Verhältnis der Ladung Q zur Grösse der geladenen Fläche A :

$$\sigma = \frac{Q}{A} \quad [\sigma] = C/m^2, [Q] = C, [A] = m^2$$

Die **elektrische Flussdichte** gibt die Richtung des elektrischen Feldes an und ist betragsmässig gleich der Flächenladungsdichte: $D = \sigma$.

Die Ladungen (Punktladungen und Flächenladungen) sind Ursache des elektrischen Feldes, das durch die elektrische Flussdichte D beschrieben wird: $D = Q/A$

Die Kräfte auf Ladungen sind Wirkungen des elektrischen Feldes und werden durch die elektrische Feldstärke E beschrieben: $F = QE$

$$\text{Ursache } D \text{ und Wirkung } E \text{ sind im Vakuum via universelle Konstante miteinander verknüpft: } \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

In einem Material wird die Proportionalität zwischen elektrischer Flussdichte \vec{D} und elektrischer Feldstärke \vec{E} mithilfe der Permittivität ϵ beschrieben.

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad [D] = C/m^2, [E] = V/m, [\epsilon] = C/(Vm) = F/m \quad \text{mit } F = C/V = \text{Farad (F)}$$

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$$

$$\epsilon \quad \text{Permittivität} \quad [\epsilon] = F/m$$

$$\epsilon_r \quad \text{Permittivitätszahl} \quad [\epsilon_r] = 1$$

$$\epsilon_0 \quad \text{elektr. Feldkonstante} \quad \epsilon_0 \approx 8.854187817 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$$

Die Feldstärke E wird bei Anwesenheit eines Materials ($\epsilon_r > 1$) auf Grund der Polarisation des Materials bei gleicher Flussdichte D kleiner.

Wenn Ladungen getrennt werden oder Ladungen auf einen Körper gebracht werden, muss Arbeit geleistet werden, und es stellt sich eine bestimmte Spannung (zwischen den getrennten positiven und negativen Ladungen) ein. Das Verhältnis zwischen getrennter Ladung Q und entstandener Spannung U nennt man **Kapazität** C des Körpers. Die Kapazität ist abhängig von der Geometrie und dem Material des Körpers (Plattenkondensator, Kugelkondensator, ...)

$$C = \frac{Q}{U} \quad [C] = \text{Farad (F)}, [Q] = C, [U] = V$$

Die geleistete Arbeit steckt in der Energie des elektrischen Feldes und beträgt:

$$E_F = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad \text{Energie im elektrischen Feld des Kondensators}$$

Für die Kapazität C eines Plattenkondensators mit Fläche A und Abstand s der beiden Platten gilt ...

$$C = \frac{\epsilon A}{s} \quad \text{Kapazität eines Plattenkondensators}$$

Beim Aufladen bzw. Entladens eines Plattenkondensators mit der Kapazität C beträgt der zeitliche Verlauf der Spannung $u_C[t]$ über dem Kondensator bzw. der zeitliche Verlauf des Stroms $i \dots$

Aufladen eines Kondensators mithilfe einer Batterie mit der Spannung $U_B \dots$

$$u_C[t] = U_B (1 - e^{-t/\tau}) \quad i = \frac{U_B}{R} e^{-t/\tau}$$

$$\tau = RC \quad \text{Zeitkonstante}$$

Entladen eines Kondensators (U_0 : anfängliche Spannung) über einen Ohm'schen Widerstand ..

$$u_C[t] = U_0 e^{-t/\tau} \quad i = \frac{U_0}{R} e^{-t/\tau}$$

Magnetfeld

Durchflutungsgesetz (Gesetz von Ampere): Das Integral der magnetischen Feldstärke H längs einer geschlossenen Umlauflinie ist gleich der Summe der von der Kurve eingeschlossenen Ströme, der so genannten Durchflutung:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum I \quad \text{mit } \vec{H} \quad \text{magnetische Feldstärke, } [H] = \text{A/m}$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} \quad \text{magnetische Umlaufspannung}$$

Anwendung dieses Gesetzes liefert die magnetische Feldstärke $H \dots$

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad \text{im Abstand } r \text{ von einem stromdurchflossenen geraden Draht}$$

$$H = \frac{IN}{s} \quad \text{im Inneren einer Spule mit } N \text{ Windungen und der Länge } s$$

Die Richtung von \vec{H} kann mithilfe der Korkezieherregel abgeleitet werden.

Die Ströme erzeugen das Magnetfeld, beschrieben durch die magnetische Feldstärke H . Die Kräfte des Magnetfeldes auf elektrische Ladungen oder Ströme werden durch die magnetische Flussdichte B beschrieben ..

$$\text{Ursache } \vec{H} \text{ und Wirkung } \vec{B} \text{ sind im Vakuum via universelle Konstante miteinander verknüpft: } \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

In einem Material wird die Proportionalität zwischen magnetischer Flussdichte \vec{B} und magnetischer Feldstärke \vec{H} mithilfe der Permeabilität μ beschrieben.

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad B \quad \text{magnetische Flussdichte, } [B] = \text{Vs/m}^2 = \text{T (Tesla)}$$

$$H \quad \text{magnetische Feldstärke, } [H] = \text{A/m,}$$

$$\mu \quad \text{Permeabilität, } [\mu] = \text{Vs/(A m)} = \text{H/m} \quad \text{mit } \text{Vs/A} = \text{H (Henry)}$$

$$\mu = \mu_r \mu_0 \quad \mu \text{ Permeabilität} \quad [\mu] = \text{H/m}$$

$$\mu_r \text{ Permeabilitätszahl} \quad [\mu_r] = 1$$

$$\mu_0 \text{ magn. Feldkonstante } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \approx 1.2566370614 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$$

Man unterscheidet drei unterschiedliche magnetische Materialien ...

ferromagnetisch	$\mu_r \gg 1$	sie stärken das Feld erheblich
paramagnetisch	$\mu_r > 1$	sie stärken das Feld geringfügig
diamagnetisch	$\mu_r < 1$	sie schwächen das Feld geringfügig.

Magnetische Felder üben auf Ladungsträger Kräfte aus, wenn sich diese relativ zum Feld bewegen. Diese Kraft nennt man Lorentz Kraft. Die Richtung der Kraft ist (gemäß Vektorprodukt) senkrecht zur Geschwindigkeit \vec{v} und senkrecht zur magnetischen Flussdichte \vec{B} (Rechte Hand Regel).

$$\vec{F} = Q (\vec{v} \times \vec{B}) \quad \text{Lorentz-Kraft}$$

$$[F] = \text{N}, [Q] = \text{C (Coulomb)}, [B] = \text{T}, [v] = \text{m/s}$$

Jeder Strom in einem Leiter besteht aus bewegten Ladungen, auf die ebenfalls eine Lorentz-Kraft wirkt. Für einen Leiter, in dem ein Strom der Stromstärke I fließt und der sich auf einer Länge s in einem magnetischen Feld mit der Flussdichte \vec{B} befindet, wirkt die Kraft \vec{F} ...

$$\vec{F} = I (\vec{s} \times \vec{B})$$

Kraft auf einen Stromleiter im Magnetfeld

$$[F] = \text{N}, [I] = \text{A}, [B] = \text{T}, [s] = \text{m}$$

Induktionsgesetz von Faraday: Die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses Φ induziert eine Spannung U_{ind} ...

$$U_{\text{ind}} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

U_{ind} induzierte Spannung, $[U] = \text{V}$

$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$ magnetischer Fluss, $[\Phi] = \text{Vs} = \text{Wb}$ (**Weber**)

das Integral wird über die Fläche A durchgeführt

Eine Änderung des Flusses Φ kann durch eine Änderung des Magnetfelds (d.h. B) oder durch Verändern der Fläche A (z.B. Bewegen des Leiters) erreicht werden. Änderungen des magnetischen Flusses induzieren nicht nur in anderen Leitern eine Spannung, sondern auch in dem das magnetische Feld erzeugenden Leiter selbst. Diese Erscheinung nennt man **Selbstinduktion**. Es gilt ...

$$U_{\text{ind}} = -L \frac{\partial I}{\partial t}$$

L Induktivität, $[L] = \text{Vs} / \text{A} = \text{H}$ (**Henry**)

Die durch Selbstinduktion entstehenden Spannungen wirken verzögernd auf die sie erzeugenden Stromstärkeänderungen.

Die Induktivität L einer langen Zylinderspule mit Länge s , Querschnittsfläche A und N Windungen ist gegeben durch ...

$$L = \frac{\mu N^2 A}{s}$$

μ Permeabilität des Materials in der Zylinderspule

In jedem magnetischen Feld ist Energie E_F gespeichert. Sie entspricht der Arbeit, die zum Aufbau des Feldes aufzuwenden ist. Die Energiedichte w an einer bestimmten Stelle beträgt ...

$$w = \frac{E_F}{V} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} B H$$

bzw. $E_F = w V$

w Energiedichte $[w] = \text{J} / \text{m}^3$

V Volumen $[V] = \text{m}^3$

μ Permeabilität $[\mu] = \text{H} / \text{m}$

H, B magnetische Feldstärke H , magnetische Flussdichte B

Für die Feldenergie E_F , die im Magnetfeld einer langen, stromdurchflossenen Spule mit der Induktivität L steckt, gilt ...

$$E_F = \frac{1}{2} L I^2$$

Übersicht zu Grössen des elektrischen und magnetischen Feldes

Elektrisches Feld			Magnetisches Feld		
Grösse	Gleichung	Einheit	Grösse	Gleichung	Einheit
Stromstärke	$I = \frac{dQ}{dt}$	A	Induz. Spannung	$U = -\frac{d\Phi}{dt}$	V
Ladung	$Q = It$	C	magnetischer Fluss	$\Phi = BA$	Wb = Vs
elektr. Flussdichte	$D = \frac{Q}{A}$	C/m ²	magn. Flussdichte	$B = \frac{\Phi}{A}$	T = Wb/m ²
	$D = \epsilon E$	C/m ²		$B = \mu H$	T
elektr. Feldkonstante	ϵ_0	F/m	magn. Feldkonstante	μ_0	H/m
Permittivitätszahl	ϵ_r	1	Permeabilitätszahl	μ_r	1
Permittivität	$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$	F/m	Permeabilität	$\mu = \mu_r \mu_0$	H/m
elektr. Feldstärke	$E = D/\epsilon$	V/m	magn. Feldstärke	$H = B/\mu$	A/m
elektr. Spannung	$U = Es$	V	magn. Spannung	$V = Hs$	A
Kapazität	$C = \frac{Q}{U}$	F = C/V	Induktivität	$L = -\frac{U_{ind}}{\partial I/\partial t}$	H
Energiedichte	$w = \frac{1}{2} ED$	J/m ³	Energiedichte	$w = \frac{1}{2} BH$	J/m ³
Feldenergie	$E_F = \frac{1}{2} C U^2$	J	Feldenergie	$E_F = \frac{1}{2} L I^2$	J
Kraft	$\vec{F} = Q\vec{E}$	N	Lorentzkraft	$\vec{F} = Q(\vec{v} \times \vec{B})$	N

Anhang

Griechisches Alphabet

Alpha: A, α	Eta: H, η	Ny: N, ν	Tau: T, τ
Beta: B, β	Theta: $\Theta, \theta, \vartheta$	Xi: Ξ, ξ	Ypsilon: Y, υ
Gamma: Γ, γ	Jota: I, ι	Omikron: O, \omicron	Phi: Φ, ϕ, φ
Delta: Δ, δ	Kappa: K, κ, χ	Pi: Π, π	Chi: X, χ
Epsilon: E, ϵ, ε	Lambda: Λ, λ	Rho: P, ρ, ϱ	Psi: Ψ, ψ
Zeta: Z, ζ	My: M, μ	Sigma: Σ, σ	Omega: Ω, ω

Multiplikation mit 1

Physikalische Grössen können einfach mithilfe der Methode **“Multiplikation mit 1”** in anderen Einheiten dargestellt werden ...

Länge	$1 = \frac{2.54 \text{ cm}}{1 \text{ Zoll (")}} = \frac{1609.344 \text{ m}}{1 \text{ mile}} = \frac{9.4605 \times 10^{15} \text{ m}}{1 \text{ Lichtjahr (ly)}} = \frac{1.49600 \times 10^{11} \text{ m}}{1 \text{ Astronomische Einheit (AE)}}$
Volumen	$1 = \frac{10^{-3} \text{ m}^3}{1 \text{ Liter (L)}} = \frac{3.785 \text{ Liter}}{1 \text{ US Gallone (gal)}} = \frac{4.546 \text{ Liter}}{1 \text{ UK Gallone}} = \frac{35.239 \text{ m}^3}{1 \text{ US bushel}}$
Zeit	$1 = \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ Minute}} = \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ Stunde}} = \frac{86400 \text{ s}}{1 \text{ Tag}}$
Geschwindigkeit	$1 = \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3.6 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{331 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ Mach}} = \frac{0.5144 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1.852 \frac{\text{km}}{\text{h}}}{1 \text{ Knoten} = 1 \text{ sm/h}} = \frac{0.447 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1.609 \frac{\text{km}}{\text{h}}}{1 \text{ mile per hour (mph)}}$
Masse	$1 = \frac{10^{-3} \text{ kg}}{1 \text{ Gramm (g)}} = \frac{10^3 \text{ kg}}{1 \text{ Tonne (t)}} = \frac{1.660539 \times 10^{-27} \text{ kg}}{1 \text{ atomare Masseneinheit (u)}} = \frac{0.453592 \text{ kg}}{1 \text{ pound (lb)} = 16 \text{ oz}}$
Druck	$1 = \frac{100\,000 \text{ Pa}}{1 \text{ bar}} = \frac{100 \text{ Pa}}{1 \text{ mbar}} = \frac{133.3224 \text{ Pa}}{1 \text{ Torr} = 1 \text{ mmHg}} = \frac{9806.65 \text{ Pa}}{1 \text{ mWS}}$
Arbeit	$1 = \frac{3.6 \times 10^6 \text{ J}}{1 \text{ kWh}} = \frac{1.6021765 \times 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} = \frac{4186.8 \text{ J}}{1 \text{ kcal}} \quad 1 \text{ J} = 1 \text{ N m} = 1 \text{ W s}$

Physikalische Grössen und ihre Einheiten

Mechanik

Länge l, s, r, \dots	Meter (m)
Fläche A	Quadratmeter (m^2)
Volumen V	Kubikmeter (m^3)
Masse m	Kilogramm (kg)
Dichte ρ	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Zeit t	Sekunde (s)
Frequenz f	Hertz (Hz) = $\frac{1}{\text{s}}$
	oder Drehzahl n oder Umdrehungsfrequenz f
Geschwindigkeit v, c	$\frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$
Beschleunigung a	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Impuls p	Newtonsekunde (N s) = $\frac{\text{kg m}}{\text{s}}$
Kraft F	Newton (N) = $\frac{\text{J}}{\text{m}} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$
Federkonstante k	$\frac{\text{Newton}}{\text{Meter}} \left(\frac{\text{N}}{\text{m}} \right) = \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$
Arbeit W oder Energie E oder Wärme Q Energiedichte w	Joule (J) = N m = W s = $\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$ $\frac{\text{J}}{\text{m}^3}$
Leistung P	Watt (W) = $\frac{\text{J}}{\text{s}} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3}$
Winkel α, φ, \dots	Radian (rad) = $\frac{\text{m}}{\text{m}} = 1$
Winkelgeschwindigkeit ω oder Kreisfrequenz ω	$\frac{\text{Radian}}{\text{Sekunde}} \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) = \frac{1}{\text{s}}$
Winkelbeschleunigung α	$\frac{\text{Radian}}{\text{Sekundenquadrat}} \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right) = \frac{1}{\text{s}^2}$
Drehmoment M	N m
Drehimpuls L	N m s = $\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$
Trägheitsmoment J	Kilogramm Quadratmeter (kg m^2)
Oberflächenspannung σ	$\frac{\text{Newton}}{\text{Meter}} \left(\frac{\text{N}}{\text{m}} \right) = \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$
Druck (Kraft pro Fläche) p	Pascal (Pa) = $\frac{\text{Newton}}{\text{Quadratmeter}} \left(\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right) = \left(\frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right) = \frac{\text{kg}}{\text{m s}^2}$
mechanische Spannung σ sowie Elastizitätsmodul E oder Kompressionsmodul K oder Schubmodul G	Pascal (Pa) = $\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{m s}^2}$
dynamische Viskosität η	Pascalsekunde (Pa s) = $\frac{\text{N s}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{m s}}$
kinematische Viskosität ν	$\frac{\text{Quadratmeter}}{\text{Sekunde}} = \left(\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right)$

Akustik

Schalldruck p maximaler Schalldruck \hat{p} , effektiver Schalldruck \bar{p}	Pascal (Pa) = $\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3} = \frac{\text{kg}}{\text{m s}^2}$
Schallintensität J	$\frac{\text{Watt}}{\text{Quadratmeter}} \left(\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right)$
Schallintensitätspegel L_J	Dezibel (dB) = 1
Schalldruckpegel L_p	Dezibel (dB) = 1
Lautstärkepegel L_N	Phon (phon) = 1

Optik

Brechzahl n	1
Brennweite f oder Gegenstandsweite g , Bildweite b	m
Brechwert D , Brechkraft D	Dioptrie (dpt) = $\frac{1}{\text{m}}$
Optische Dicke	m
Phasenunterschied Δ	Radian (rad) = $\frac{\text{m}}{\text{m}} = 1$

Raumwinkel Ω

$$\text{Steradian (sr)} = \frac{\text{m}^2}{\text{m}^2} = 1$$

Siehe auch vorne unter "Lichtstrahlung"

Wärmelehre

Druck p

$$\text{Pascal (Pa)} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3} = \frac{\text{kg}}{\text{m s}^2}$$

absolute Temperatur T

Kelvin (K)

Celsius Temperatur t

Grad Celsius ($^{\circ}\text{C}$)

Stoffmenge n

Mol (mol)

molare Masse M

$$\frac{\text{Kilogramm}}{\text{Mol}} \left(\frac{\text{kg}}{\text{mol}} \right)$$

molares Volumen V_m

$$\frac{\text{Kubikmeter}}{\text{Mol}} \left(\frac{\text{m}^3}{\text{mol}} \right)$$

Längenausdehnungskoeffizient α

$$\frac{1}{\text{Kelvin}} \left(\frac{1}{\text{K}} \right)$$

Volumenausdehnungskoeffizient γ

$$\frac{1}{\text{Kelvin}} \left(\frac{1}{\text{K}} \right)$$

Wärme Q

Joule (J)

oder Schmelzwärme Q_{sm} , Erstarrungswärme Q_{sm}

oder Verdampfungswärme Q_{sd} , Kondensationswärme Q_{sd}

oder Sublimationswärme, Resublimationswärme

spezifische Wärme q

$$\frac{\text{Joule}}{\text{Kilogramm}} \left(\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right) = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

spezifische Schmelzwärme, Verdampfungswärme

Wärmekapazität C

$$\frac{\text{Joule}}{\text{Kelvin}} \left(\frac{\text{J}}{\text{K}} \right) = \frac{\text{Ws}}{\text{K}} = \frac{\text{Nm}}{\text{K}} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2 \text{K}}$$

oder Entropie S

Spezifische Wärmekapazität c

$$\frac{\text{J}}{\text{kg K}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2 \text{K}}$$

c_V, c_p für Gase

Molare Wärmekapazität C_m

$$\frac{\text{J}}{\text{mol K}} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{mol s}^2 \text{K}}$$

oder Entropie S

Wärmeleitfähigkeit λ

$$\frac{\text{W}}{\text{m K}} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^3 \text{K}}$$

Wärmedurchgangskoeffizient k (k-Wert)

$$\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} = \frac{\text{kg}}{\text{s}^3 \text{K}}$$

oder Wärmeübergangskoeffizient α

Elektrizitätslehre

Ladung Q

Coulomb (C) = A s

Elektrische Stromstärke I

$$\text{Ampere (A)} = \frac{\text{C}}{\text{s}}$$

Elektrische Spannung U

$$\text{Volt (V)} = \frac{\text{W}}{\text{A}} = \frac{\text{J}}{\text{C}} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3 \text{A}}$$

Elektrische Leistung P

$$\text{Watt (W)} = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3}$$

Elektrischer Widerstand R

$$\text{Ohm } (\Omega) = \frac{\text{V}}{\text{A}} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3 \text{A}^2}$$

Spezifischer Elektrischer Widerstand ρ

$$\text{Ohmmeter } (\Omega \text{ m}) = \frac{\text{Vm}}{\text{A}} = \frac{\text{kg m}^3}{\text{s}^3 \text{A}^2}$$

Elektrischer Leitwert G	Siemens (S) = $\frac{1}{\Omega} = \frac{A}{V} = \frac{s^3 A^2}{kg m^2}$
Elektrische Leitfähigkeit κ	$\frac{\text{Siemens}}{\text{Meter}} \left(\frac{S}{m} \right) = \frac{1}{\Omega m} = \frac{s^3 A^2}{kg m^3}$
Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstands α	$\frac{1}{K}$
Elektrische Feldstärke E	$\frac{V}{m} = \frac{N}{C} = \frac{kg m}{s^3 A}$
Flächenladungsdichte σ	$\frac{\text{Coulomb}}{\text{Quadratmeter}} \left(\frac{C}{m^2} \right)$
Elektrische Flussdichte D	$\frac{C}{m^2}$
Elektrische Feldkonstante ϵ_0	$\frac{C}{Vm}$
Permittivitätszahl ϵ_r	1
Permittivität ϵ	$\frac{C}{Vm}$
Elektrisches Potenzial φ	Volt (V)
Kapazität C	Farad (F) = $\frac{C}{V} = \frac{As}{V}$

Magnetismus

Magnetische Feldstärke H	$\frac{\text{Ampere}}{\text{Meter}} \left(\frac{A}{m} \right) = \frac{N}{Wb}$
Magnetische Spannung V	Ampere (A)
Magnetische Flussdichte B	Tesla (T) = $\frac{Wb}{m^2} = \frac{Vs}{m^2} = \frac{kg}{s^2 A}$
Magnetische Feldkonstante μ_0	$\frac{Vs}{Am} = \frac{H}{m}$
Permeabilitätszahl μ_r	1
Permeabilität μ	$\frac{Vs}{Am} = \frac{H}{m}$
Magnetischer Fluss Φ	Weber (Wb) = Vs
Magnetische Polarisation J	Tesla (T) = $\frac{Wb}{m^2} = \frac{Vs}{m^2} = \frac{kg}{s^2 A}$
Magnetisierung M	$\frac{A}{m}$
Magnetische Suszeptibilität κ	1
Induktivität L	Henry (H) = $\frac{Wb}{A} = \frac{Vs}{A}$

Winkel, Winkelfunktionen, Dreieck, Viereck, Kreis

Winkel

1 Vollwinkel = $360^\circ = 2\pi \text{ rad} = 400 \text{ gon} \hat{=} 1 \text{ Umdrehung}$

Für alle Winkel φ gilt: $\sin[\varphi]^2 + \cos[\varphi]^2 = 1$ $\tan[\varphi] = \frac{\sin[\varphi]}{\cos[\varphi]}$

Spitzer, Rechter, Stumpfer, Gestreckter, Überstumpfer und Vollwinkel.

Scheitel-, Neben-, Stufen- und Wechselwinkel.

Allgemeines Dreieck

Winkelsatz

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Sinussatz

$$\frac{\sin[\alpha]}{a} = \frac{\sin[\beta]}{b} = \frac{\sin[\gamma]}{c} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{\sin[\alpha]} = \frac{b}{\sin[\beta]} = \frac{c}{\sin[\gamma]}$$

Cosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos[\gamma] \quad \text{und zyklisch}$$

$$U = a + b + c$$

$$A = \frac{1}{2} gh$$

Begriffe

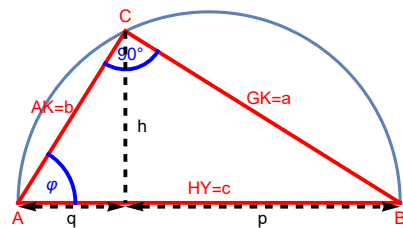
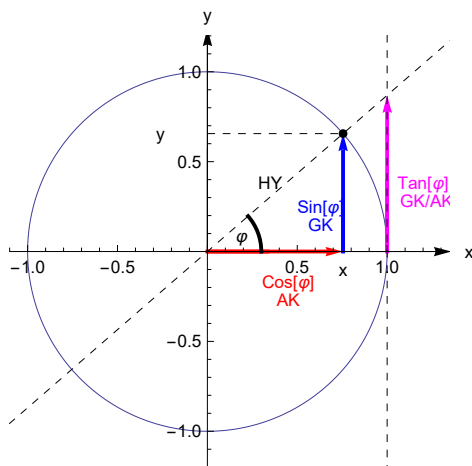
Seitenhalbierende, Winkelhalbierende, Höhe, Mittelsenkrechte.
Umkreismittelpunkt, Inkreismittelpunkt,

Spezielle Dreiecke

Gleichseitig Gleichschenklig, Rechtwinklig

Rechtwinkliges Dreieck

$$\sin[\varphi] = \frac{GK}{HY} \quad \cos[\varphi] = \frac{AK}{HY} \quad \tan[\varphi] = \frac{GK}{AK}$$



Satz des Pythagoras: $AK^2 + GK^2 = HY^2$

$$\text{bzw. } a^2 + b^2 = c^2$$

Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$

Kathetensatz: $b^2 = q \cdot c$ bzw. $a^2 = p \cdot c$

Thaleskreis

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} \cos[\varphi] \\ \sin[\varphi] \end{pmatrix}$$

Einheitsvektor in "Richtung" φ (gemessen im Gegenuhrzeigersinn von der x – Achse aus).

Vierecke

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$$

Quadrat, Rechteck, Raute = Rhombus, Parallelogramm = Rhomboid,
Drachenviereck, Trapez, Sehnenviereck, Tangentenviereck.

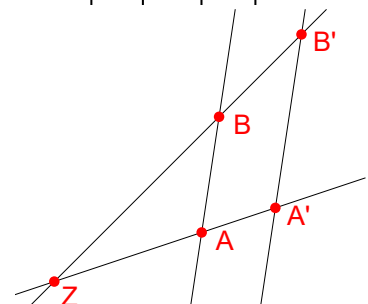
Kreis

$$d = 2r \quad U = 2\pi r \quad A = \pi r^2 \quad x^2 + y^2 = r^2$$

Strahlensätze

Erster Strahlensatz: $\frac{|ZA|}{|ZA'|} = \frac{|ZB|}{|ZB'|}$ bzw. $\frac{|ZA|}{|AA'|} = \frac{|ZB|}{|BB'|}$

Zweiter Strahlensatz: $\frac{|ZA|}{|ZA'|} = \frac{|AB|}{|A'B'|}$



Vektoren

Vektoren	Chasles: $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$	
	Ortsvektor: $\vec{A} = \vec{OA} = \vec{A} - \vec{O} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$	$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$
	Mittelpunkt: $\vec{M}_{AB} = \vec{A} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B})$	Schwerpunkt $\vec{S}_{ABC} = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$
	$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix}$	$k * \vec{a} = k * \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k a_x \\ k a_y \\ k a_z \end{pmatrix}$
	Gegenvektor $-\vec{a}$	Nullvektor $\vec{0}$
	Subtraktion = der Addition des Gegenvektors:	$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$
	Zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} sind parallel, falls	$\vec{b} = k \vec{a}$ oder $\vec{a} * \vec{b} = \vec{0}$
	Betrag/Länge des Vektors \vec{a} (Pythagoras):	$a = \ \vec{a}\ = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$
	Einheitsvektor (d.h. Länge 1) von \vec{a} :	$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{a}$ im 2D: $\vec{a}_0 = \begin{pmatrix} \cos[\varphi] \\ \sin[\varphi] \end{pmatrix}$
	→	$\vec{a} = a \vec{a}_0$ "Vektor = Länge mal Richtung"
	Kippregel (im 2D):	$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \xrightarrow{+90^\circ} \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \xrightarrow{-90^\circ} \begin{pmatrix} a_y \\ -a_x \end{pmatrix}$
Skalarprodukt	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = a b \cos[\varphi]$	
	$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$	
	Projektion von \vec{a} auf \vec{b} : $\vec{a}_{\parallel \vec{b}} = a \cos[\varphi] \vec{b}_0 = (\vec{a} \cdot \vec{b}_0) \vec{b}_0 = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{b^2} \vec{b}$	
Vektorprodukt	$\vec{a} * \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} = a b \sin[\varphi] * \vec{n}_0 \quad 0 \leq \varphi < 180^\circ$	
	Richtung $\vec{a} * \vec{b}$ bzw. \vec{n}_0	stehen senkrecht auf \vec{a} und \vec{b}
	$\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} * \vec{b}$	bilden ein rechtshändiges System
	Betrag $\ \vec{a} * \vec{b}\ = a b \sin[\varphi]$,	Fläche des Parallelogramms

Kartesische ↔ Polarkoordinaten $\{x, y\} \leftrightarrow \{r, \varphi\} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \leftrightarrow \{a, \varphi\}$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	$\varphi = \begin{cases} \text{unbestimmt} & x=0 \wedge y=0 \\ 90^\circ & x=0 \wedge y>0 \\ 270^\circ & x=0 \wedge y<0 \\ \text{ArcTan}\left[\frac{y}{x}\right] & x>0 \\ \text{ArcTan}\left[\frac{y}{x}\right] + 180^\circ & x<0 \end{cases}$	Quadrant beachten
$x = r \cos[\varphi]$	$y = r \sin[\varphi]$	

Ellipsen

Eine Ellipse mit Mittelpunkt $M = \{0, 0\}$, der grossen Halbachse a und der kleinen Halbachse b kann folgendermassen definiert werden (wenn die grosse Halbachse parallel zur x-Achse verläuft) ...

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a grosse Halbachse

b kleine Halbachse

Weitere wichtige Grössen sind die Brennpunkte F_1, F_2 , die lineare Exzentrizität e und die numerische Exzentrizität ε , die folgendermassen zusammenhängen ...

$$a^2 = b^2 + e^2$$

e lineare Exzentrizität

$$\varepsilon = e/a$$

ε numerische Exzentrizität

Brennpunkte

$$F_1 = \{-e, 0\}$$

$$F_2 = \{e, 0\}$$

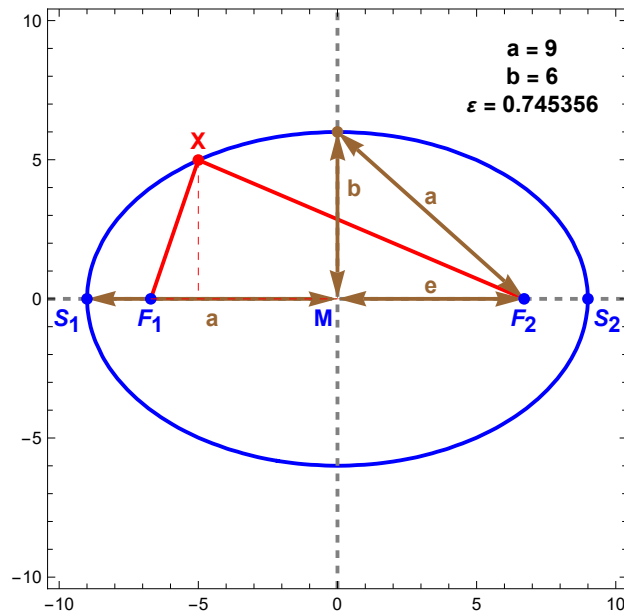


Abbildung Ellipse mit $a = 9$ und $b = 6$

Eine Ellipse ist die Menge aller Punkte X , für die die Summe $XF_1 + XF_2$ gleich $2a$ ist.

Körper im Raum

Notation:

Volumen V , Oberfläche O , Grundfläche G , Höhe h , Radius r

Zylinder

$$V = G h$$

$$O = 2 G + M$$

Würfel

$$V = a^3$$

$$O = 6 a^2$$

Quader

$$V = a b c$$

$$O = 2(a b + a c + b c)$$

Kreiszyylinder

$$V = \pi r^2 h$$

$$O = 2 \pi r^2 + 2 \pi r h$$

Pyramide

$$V = \frac{1}{3} G h$$

$$O = G + M$$

Kreiskegel

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$O = \pi r^2 + \pi r s$$

$$s = \sqrt{r^2 + h^2}$$

Kugel

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$O = 4 \pi r^2$$

Potenzen und Potenzgesetze

Es gilt	$a^0 = 1$	z.B.	$\dim[V] = L^1 T^{-1} M^0 I^0 \theta^0 N^0 J^0 = L^1 T^{-1}$
	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	z.B.	$m s^{-1} = m \frac{1}{s} = \frac{m}{s}$
	$\frac{1}{a^n} = \sqrt[n]{a}$	z.B.	$a^{1/2} = \sqrt{a}$
Gleiche Basis	$a^n a^m = a^{n+m}$	z.B.	$10^{-3} * 10^5 = 10^2$
Gleicher Exponent	$a^n b^n = (a b)^n$	z.B.	$\sqrt{a} * \sqrt{b} = \sqrt{a b}$
Rechtsassoziativität	$a^{n^m} = a^{(n^m)}$	so definiert (von rechts abarbeiten)	
hoch hoch	$(a^n)^m = a^{n m} = (a^m)^n$	z.B.	$(10^{-3})^2 = 10^{-6}$

Lineare Funktionen (Geraden)

Funktionen (explizit)	$f[x] = a * x + b$	$= a * (x - n)$	$= y_1 + a(x - x_1)$	$= y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$
	Normalform	Nullstellenf.	Punkt-Steigungsform.	2 Punkte Form
Gleichung (implizit)	$\frac{x}{n} + \frac{y}{b} = 1$		$A x + B y + C = 0$	
	Achsenabschnittsform		Allgemeine Form (→ Vektorgeometrie)	

Quadratische Funktionen (Parabeln)

Funktion	$f[x] = a x^2 + b x + c$	$= a(x - n_1)(x - n_2)$	$= y_S + a(x - x_S)^2$
	Normalform	Nullstellenform	Scheitelpunktform
Quadratische Gleichung	$a x^2 + b x + c = 0$	mit $a \neq 0$	
	Diskriminante	$D = b^2 - 4 a c$	
	Lösung/Nullstellen:	$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a}$	abc - Formel
	Scheitelpunkt:	$x_S = -\frac{b}{2 a}$	$y_S = c - \frac{b^2}{4 a}$
	Kegelschnitte:	Ellipse (Kreis), Parabel, Hyperbel	

Exponential- und Logarithmusfunktionen

Funktionen	$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a[y]$	$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^+$	
Logarithmengesetze	$\log[c^n] = n \log[c]$	$\log[c d] = \log[c] + \log[d]$	$\log\left[\frac{c}{d}\right] = \log[c] - \log[d]$
Basiswechsel	$\log_a[x] = \frac{\log_b[x]}{\log_b[a]} = \frac{\ln[x]}{\ln[a]} = \frac{\lg[x]}{\lg[a]}$		

Winkelfunktionen

Funktionen	Sin[x], ArcSin[x]	Cos[x], ArcCos[x]	Tan[x], ArcTan[x]
Gleichungen	$\boxed{\text{Sin}[x] = c}$	$-1 \leq c \leq 1 \quad \rightarrow$	$\begin{cases} x_{1,k} = \mathbf{ArcSin}[c] + k 2 \pi \\ x_{2,k} = \mathbf{\pi - ArcSin}[c] + k 2 \pi \end{cases}$
	$\boxed{\text{Cos}[x] = c}$	$-1 \leq c \leq 1 \quad \rightarrow$	$\begin{cases} x_{1,k} = \mathbf{ArcCos}[c] + k 2 \pi \\ x_{2,k} = \mathbf{-ArcCos}[c] + k 2 \pi \end{cases}$
	$\boxed{\text{Tan}[x] = c}$	\rightarrow	$x_k = \mathbf{ArcTan}[c] + k \pi$
Eigenschaften	$\text{Sin}[\alpha]^2 + \text{Cos}[\alpha]^2 = 1$		$\text{Tan}[\alpha] = \frac{\text{Sin}[\alpha]}{\text{Cos}[\alpha]}$
Periodizität	$\text{Sin}[\alpha + k * 360^\circ] = \text{Sin}[\alpha]$	$\text{Cos}[\alpha + k * 360^\circ] = \text{Cos}[\alpha]$	$\text{Tan}[\alpha + k * 180^\circ] = \text{Tan}[\alpha]$

Reduktionsformeln ohne Änderung der Winkelfunktionen (180°)

$\text{Sin}[-\alpha] = -\text{Sin}[\alpha]$	$\text{Cos}[-\alpha] = \text{Cos}[\alpha]$	$\text{Tan}[-\alpha] = -\text{Tan}[\alpha]$
$\text{Sin}[180^\circ + \alpha] = -\text{Sin}[\alpha]$	$\text{Cos}[180^\circ + \alpha] = -\text{Cos}[\alpha]$	$\text{Tan}[180^\circ + \alpha] = \text{Tan}[\alpha]$
$\text{Sin}[180^\circ - \alpha] = \text{Sin}[\alpha]$	$\text{Cos}[180^\circ - \alpha] = -\text{Cos}[\alpha]$	$\text{Tan}[180^\circ - \alpha] = -\text{Tan}[\alpha]$

Reduktionsformeln mit Änderung der Winkelfunktionen (90°)

$\text{Sin}[90^\circ + \alpha] = \text{Cos}[\alpha]$	$\text{Sin}[90^\circ - \alpha] = \text{Cos}[\alpha]$	$\text{Cos}[90^\circ - \alpha] = \text{Sin}[\alpha]$
--	--	--

Erster Summensatz - Winkelfunktionen von Summen/Differenzen zweier Winkel bzw. Winkelvielfachen

$\text{Sin}[\alpha \pm \beta] = \text{Sin}[\alpha] \text{Cos}[\beta] \pm \text{Cos}[\alpha] \text{Sin}[\beta]$	\rightarrow	$\text{Sin}[2 \alpha] = 2 \text{Sin}[\alpha] \text{Cos}[\alpha]$
$\text{Cos}[\alpha \pm \beta] = \text{Cos}[\alpha] \text{Cos}[\beta] \mp \text{Sin}[\alpha] \text{Sin}[\beta]$	\rightarrow	$\text{Cos}[2 \alpha] = \text{Cos}[\alpha]^2 - \text{Sin}[\alpha]^2$
$\text{Tan}[\alpha \pm \beta] = \frac{\text{Tan}[\alpha] \pm \text{Tan}[\beta]}{1 \mp \text{Tan}[\alpha] \text{Tan}[\beta]}$	\rightarrow	$\text{Tan}[2 \alpha] = \frac{2 \text{Tan}[\alpha]}{1 - \text{Tan}[\alpha]^2}$

Zweiter Summensatz - Summen und Differenzen zweier Winkelfunktionen

$$\text{Sin}[\alpha] \pm \text{Sin}[\beta] = 2 \text{Sin}\left[\frac{\alpha \pm \beta}{2}\right] \text{Cos}\left[\frac{\alpha \mp \beta}{2}\right]$$

$$\text{Cos}[\alpha] + \text{Cos}[\beta] = 2 \text{Cos}\left[\frac{\alpha + \beta}{2}\right] \text{Cos}\left[\frac{\alpha - \beta}{2}\right]$$

$$\text{Cos}[\alpha] - \text{Cos}[\beta] = -2 \text{Sin}\left[\frac{\alpha + \beta}{2}\right] \text{Sin}\left[\frac{\alpha - \beta}{2}\right]$$

Produkte zweier Winkelfunktionen

$\text{Sin}[\alpha] \text{Sin}[\beta] = \frac{1}{2} (\text{Cos}[\alpha - \beta] - \text{Cos}[\alpha + \beta])$	\rightarrow	$\text{Sin}[\alpha]^2 = \frac{1}{2} (1 - \text{Cos}[2 \alpha])$
$\text{Cos}[\alpha] \text{Cos}[\beta] = \frac{1}{2} (\text{Cos}[\alpha - \beta] + \text{Cos}[\alpha + \beta])$	\rightarrow	$\text{Cos}[\alpha]^2 = \frac{1}{2} (1 + \text{Cos}[2 \alpha])$
$\text{Sin}[\alpha] \text{Cos}[\beta] = \frac{1}{2} (\text{Sin}[\alpha - \beta] + \text{Sin}[\alpha + \beta])$	\rightarrow	$\text{Sin}[\alpha] \text{Cos}[\alpha] = \frac{1}{2} \text{Sin}[2 \alpha]$

Ableiten und Integrieren elementarer Funktionen

Potenzfunktionen ($n \in \mathbb{R}$)

allgemein	$f[x] = x^n$	$f'[x] = n * x^{n-1} \quad n \neq 0$	$F[x] = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad n \neq -1$
speziell	$f[x] = 1$	$f'[x] = 0$	$F[x] = x$
	$f[x] = x$	$f'[x] = 1$	$F[x] = \frac{1}{2} x^2$
	$f[x] = x^{-1} = \frac{1}{x}$	$f'[x] = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$	$F[x] = \ln[x]$
	$f[x] = x^{1/2} = \sqrt{x}$	$f'[x] = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$F[x] = \frac{2}{3} x^{3/2} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3}$

Weitere elementare Funktionen

$f[x] = e^x$	$f'[x] = e^x$	$F[x] = e^x$
$f[x] = \ln[x]$	$f'[x] = \frac{1}{x}$	$F[x] = x * \ln[x] - x$
$f[x] = \sin[x]$	$f'[x] = \cos[x]$	$F[x] = -\cos[x]$
$f[x] = \cos[x]$	$f'[x] = -\sin[x]$	$F[x] = \sin[x]$

Wichtige Taschenrechner TI-30XPro Funktionen

Winkel DEG (= °) RAD GRAD (= gon)

Darstellung NORM SCI ENG

Wichtige Taschenrechnerfunktionen zum Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen sind ...

poly-solv	zum Lösen einer quadratischen oder kubischen Gleichung
sys-solv	zum Lösen eines Linearen Gleichungssystems mit 2 oder 3 Unbekannten
num-solv	numerisches Verfahren zur Lösung komplizierter Gleichungen mit einer Unbekannten.

Die TR Funktion "constants" enthält wichtige physikalische Konstanten.

Die TR Funktion "convert" ermöglicht die Umrechnung zwischen verschiedenen Einheiten.